Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaf...

Digitized by Google

by-

OSTWALD'S KLASSIKER

DER

EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

z. Z. herausgegeben von

Prof. emer. Dr. Arthur von Oettingen

Privatdocent in Leipzig.

8. In Leinen gebunden.

LANE
MEDICAL LIBRARY
SEAL OF THE LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY
1885
Seidel Collection
HISTORY OF MEDICINE
AND NATURAL SCIENCES
AMERICAN BANK NOTE CO LITHO

(88 S.) *M* 1.80.

» 20. **Chr. Huyghens,** Abhandlung üb. d. Licht. (1678.) Herausg. von E. Lommel. Mit 57 Textfig. (115 S.) *M* 2.40.

» 21. **W. Hittorf,** Über d. Wanderungen der Ionen während der Elektrolyse. (1853—1859.) I. Hälfte. Mit 1 Taf. Herausg. v. W. Ostwald. (87 S.) *M* 1.60.

» 23. —— —— II. Hälfte. Mit 1 Taf. Herausg. v. W. Ostwald. (142 S.) *M* 1.50.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

Digitized by Google

Die Intensität

der

ERDMAGNETISCHEN KRAFT

auf absolutes Maass zurückgeführt,

von

CARL FRIEDRICH GAUSS.

In der Sitzung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 15. December 1832 vorgelesen.

Herausgegeben

von

E. Dorn.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1894.

Digitized by Google

0/548

Digitized by Google

AIII H
O85
no. 53
1894

[3]

Die Intensität der erdmagnetischen Kraft

auf absolutes Maass zurückgeführt,

von

Carl Friedrich Gauss.

Zur vollständigen Bestimmung der erdmagnetischen Kraft an einem gegebenen Orte sind drei Elemente erforderlich: die Abweichung (Declination) oder der Winkel zwischen der Ebene, worin sie wirkt, und der Meridianebene; die Neigung (Inclination) der Richtung zur Horizontalebene; endlich drittens die Stärke (Intensität). Die Declination, welche mit Rücksicht auf alle Anwendungen in der Schifffahrt und Geodäsie als das wichtigste Element zu betrachten ist, hat gleich von Anfang an die Astronomen und Physiker beschäftigt, die aber auch der Inclination ihre fortwährende Aufmerksamkeit bereits seit einem Jahrhundert geschenkt haben. Das dritte Element dagegen, die Intensität der erdmagnetischen Kraft, welches sicherlich ein ebenso würdiger Gegenstand der Wissenschaft ist, blieb bis auf die neuere Zeit völlig vernachlässigt. *Humboldt* gebührt unter so vielen anderen auch das Verdienst, dass er wohl zuerst auf diesen Gegenstand sein Augenmerk gerichtet und auf seinen Reisen eine grosse Menge von Beobachtungen über die relative Stärke des Erdmagnetismus gesammelt hat, aus denen sich eine fortwährende Zunahme dieser Stärke beim Fortschreiten von dem magnetischen Aequator gegen den Pol hin ergeben hat. Sehr viele Physiker sind in die Fusstapfen jenes grossen Naturforschers getreten und haben bereits eine solche Menge von Bestimmungen zusammengetragen, dass der um die Kenntniss des

Digitized by Google

Erdmagnetismus hochverdiente *Hansteen* neulich bereits den Versuch einer allgemeinen isodynamischen Karte hat herausgeben können.

Die bei allen diesen Untersuchungen angewandte Methode besteht in der Beobachtung der Zeit, während welcher eine und dieselbe Magnetnadel an den verschiedenen Orten dieselbe Anzahl von [4] Schwingungen ausführt oder der Anzahl der Schwingungen innerhalb desselben Zeitraumes, und die Stärke wird dem Quadrate der Anzahl der Schwingungen in einer gegebenen Zeit proportional gesetzt: auf diese Weise werden die ganzen Intensitäten unter einander verglichen, wenn eine im Schwerpunkt aufgehängte Inclinationsnadel um eine horizontale und senkrecht gegen den magnetischen Meridian gerichtete Axe oscillirt, oder die horizontalen Componenten, wenn eine horizontale Nadel um eine verticale Axe schwingt. Die letztere Art der Beobachtung führt zu einer grösseren Genauigkeit und die daraus hervorgehenden Resultate lassen sich nach Feststellung der Inclination leicht auf die ganzen Intensitäten beziehen.

Offenbar hängt die Zulässigkeit dieses Verfahrens von der Voraussetzung ab, dass die Vertheilung des freien Magnetismus in den Theilchen der zu dieser Vergleichung angewandten Nadel bei den einzelnen Versuchen unverändert geblieben ist: wenn nämlich die magnetische Kraft der Nadel im Laufe der Zeit irgend eine Schwächung erlitten hätte, so würde sie deswegen später langsamer schwingen, und der Beobachter, der von einer solchen Aenderung keine Kenntniss hat, würde der Stärke des Erdmagnetismus für den späteren Ort einen zu kleinen Werth beilegen. Wenn die Versuche einen nur mässigen Zeitraum umfassen und eine aus gut gehärtetem Stahl hergestellte und sorgfältig magnetisirte Nadel angewandt wird, ist eine beträchtliche Schwächung der Kraft nicht gerade zu befürchten; ausserdem wird die Unsicherheit noch vermindert werden, wenn mehrere Nadeln zur Vergleichung herangezogen werden; endlich wird man dieser Annahme ein grösseres Vertrauen schenken, wenn man nach Zurückkunft an den ersten Ort findet, dass sich die Schwingungsdauer der Nadel nicht geändert hat. Aber welche Vorsichtsmaassregeln auch angewandt werden mögen, eine langsame Schwächung der Kraft der Nadel wird kaum vermieden und daher wird eine solche Uebereinstimmung nach längerer Abwesenheit selten erwartet werden können. Deshalb

Digitized by Google

wird man bei der Vergleichung der Intensitäten für weit auseinander gelegene Orte der Erde eine so grosse Genauigkeit, wie wir sie wünschen müssen, nicht erreichen können.

Uebrigens fällt dieser Nachtheil der Methode weniger ins Gewicht, so lange es sich nur um die Vergleichung von gleichzeitigen oder solchen Intensitäten handelt, welche nicht weit von einander entfernten Zeiten entsprechen. Aber da die Erfahrung gelehrt hat, dass sowohl die Declination als auch die Inclination an einem gegebenen Orte fortwährend Veränderungen erleiden, welche nach vielen Jahren sehr gross werden, so kann es nicht zweifelhaft sein, dass auch die Intensität des Erdmagnetismus ähnlichen gleichsam säcularen Veränderungen unterworfen ist. Offenbar verliert, sobald es sich um [5] diese Frage handelt, die genannte Methode alle Brauchbarkeit. Und doch wäre es für den Fortschritt der Naturwissenschaft ausserordentlich zu wünschen, dass diese höchst wichtige Frage vollständig erledigt werde, was sicherlich nicht geschehen kann, wenn nicht an Stelle jener rein vergleichenden Methode eine andere gesetzt wird, welche von den zufälligen Ungleichheiten der Nadeln unabhängig ist und die Intensität des Erdmagnetismus auf feststehende Einheiten und unabhängige Maasse zurückführt.

Es ist nicht schwer, die theoretischen Grundsätze anzugeben, auf welche sich eine solche schon längst gewünschte Methode stützen muss. Die Anzahl der Schwingungen, welche eine Nadel in einer gegebenen Zeit ausführt, hängt sowohl von der Intensität des Erdmagnetismus, als auch von der Beschaffenheit der Nadel, nämlich von dem statischen Momente der in jener enthaltenen Elemente des freien Magnetismus und von ihrem Trägheitsmomente ab. Da dieses Trägheitsmoment ohne Schwierigkeit ermittelt werden kann, so giebt offenbar die Beobachtung der Schwingungen uns das Produkt aus der Intensität des Erdmagnetismus in das statische Moment des Magnetismus der Nadel an die Hand: aber diese zwei Grössen können nicht getrennt werden, wenn nicht Beobachtungen einer anderen Art hinzugezogen werden, welche eine hiervon verschiedene Beziehung derselben liefern. Diesen Zweck erreicht man, wenn man noch eine zweite Nadel zu Hülfe nimmt und dieselbe der Einwirkung des Erdmagnetismus und der ersten Nadel unterwirft, um das Verhältniss dieser beiden Kräfte unter einander zu ermitteln. Jede der beiden Wirkungen wird zwar von der Vertheilung

Digitized by Google

des freien Magnetismus in der zweiten Nadel abhängen: aber die zweite ausserdem noch von der Beschaffenheit der ersten Nadel, der Entfernung der Mittelpunkte, der Lage der ihre Mittelpunkte verbindenden Geraden gegen die magnetischen Axen der beiden Nadeln, endlich von dem Gesetze der magnetischen Anziehung und Abstossung. *Tobias Mayer* hatte als erster bereits die Vermuthung aufgestellt, dass dieses Gesetz mit dem Gesetz der Gravitation insofern übereinstimme, als auch jene Wirkungen im Verhältniss des Quadrats der Entfernungen abnehmen: die Versuche von *Coulomb* und *Hansteen* haben dieser Vermuthung grosse Wahrscheinlichkeit verschafft und die neuesten Versuche erheben sie über jeden Zweifel. Aber es ist wohl zu beachten, dass dieses Gesetz sich nur auf die einzelnen Elemente des freien Magnetismus bezieht: die Gesammtwirkung eines magnetischen Körpers wird sich ganz anders verhalten und wird bei sehr grossen Entfernungen, wie sich aus eben jenem Gesetze ableiten lässt, sehr nahe dem umgekehrten Verhältniss der Cuben der Entfernungen proportional sein, so dass die Wirkung der Nadel mit dem Cubus der Entfernung multiplicirt sich bei immer wachsender Entfernung unter sonst gleichen Umständen einer bestimmten Grenze nähert. [6] Dieser Grenzwerth wird, sobald eine bestimmte Länge als Einheit angenommen ist und die Entfernungen durch Zahlen ausgedrückt werden, mit der Wirkung der Erdkraft von gleicher Art und mit ihr vergleichbar sein.

Durch eine zweckmässige Einrichtung und Behandlung der Versuche lässt sich der Grenzwerth dieses Verhältnisses bestimmen. Da derselbe nur das statische Moment des Magnetismus der ersten Nadel enthält, so wird man nunmehr den Quotienten dieses Momentes durch die Intensität der Erdkraft erhalten; vergleicht man nun diesen mit dem schon vorher ermittelten Produkte dieser Grössen, so wird er dazu dienen, dieses statische Moment zu eliminiren, und wird den Werth der Intensität des Erdmagnetismus liefern.

Was die Art und Weise betrifft, die Wirkungen des Erdmagnetismus und der ersten Nadel auf die zweite Nadel dem Versuch zu unterwerfen, so steht ein zweifacher Weg offen, da man die zweite Nadel entweder im Zustande der Bewegung oder im Zustande des Gleichgewichts beobachten kann. Die erstere Art läuft darauf hinaus, die Schwingungen dieser Nadel zu beobachten, während die Wirkung des Erd-

Digitized by Google

magnetismus verbunden wird mit der Wirkung der ersten Nadel. Diese muss in geeigneter Entfernung derart angebracht sein, dass ihre Axe in dem durch den Mittelpunkt der schwingenden Nadel gehenden magnetischen Meridian liegt: dadurch werden die Schwingungen entweder beschleunigt oder verzögert, je nachdem ungleichnamige oder gleichnamige Pole einander zugekehrt sind, und die Vergleichung entweder der Schwingungszeiten für jede der beiden Lagen der ersten Nadel unter einander oder der Schwingungszeit einer der beiden Lagen mit der Schwingungszeit, die (nach Entfernung der ersten Nadel) unter der alleinigen Wirkung des Erdmagnetismus stattfindet, wird das Verhältniss dieser Kraft zur Wirkung der ersten Nadel kennen lehren. Bei der zweiten Art legt man die erste Nadel so, dass die Richtung ihrer Kraft, welche sie am Ort der zweiten frei aufgehängten Nadel ausübt, einen Winkel (z. B. einen rechten) mit dem magnetischen Meridian bildet; hierdurch wird diese selbst aus dem magnetischen Meridian abgelenkt, und aus der Grösse der Ablenkung kann man das Verhältniss zwischen der erdmagnetischen Kraft und der Einwirkung der ersten Nadel ableiten.

Uebrigens stimmt die erste Art im wesentlichen mit derjenigen überein, welche *Poisson* schon vor einigen Jahren vorgeschlagen hat. Aber die nach dieser Vorschrift von einigen Physikern angestellten Versuche sind, wenigstens soweit sie mir bekannt geworden, entweder völlig missglückt, oder können höchstens als unvollkommene Annäherungen betrachtet werden.

Die eigentliche Schwierigkeit liegt darin, dass aus den in mässigen Entfernungen beobachteten Einwirkungen der Nadel ein Grenzwerth berechnet werden muss, der sich auf eine gewissermaassen unbegrenzt grosse Entfernung bezieht, und dass die zu diesem Zwecke nothwendigen Eliminationen [7] um so mehr von den kleinsten Beobachtungsfehlern getrübt, ja sogar völlig unbrauchbar gemacht werden, je mehr Unbekannte, die von der besonderen Beschaffenheit der Nadel abhängen, zu eliminiren sind: auf eine kleine Anzahl von Unbekannten kann aber die Berechnung nur dann gebracht werden, wenn die Einwirkungen in Entfernungen geschehen, welche im Verhältniss zu der Länge der Nadeln ziemlich gross sind und deshalb selbst sehr klein werden. Aber um so kleine Einwirkungen genau zu messen, dazu reichen die bis jetzt angewandten praktischen Hülfsmittel nicht hin.

Digitized by Google

Ich erkannte, dass ich meine Bemühungen vor allem an die Auffindung neuer Hülfsmittel zu wenden hatte, um die Schwingungszeiten, wie auch die Richtungen der Nadeln mit weit grösserer Genauigkeit als seither beobachten und messen zu können. Die zu diesem Zwecke unternommenen und durch mehrere Monate fortgesetzten Arbeiten, bei welchen ich von *Weber* vielfach unterstützt worden bin, haben derart zum gewünschten Ziel geführt, dass sie die Erwartung nicht nur nicht getäuscht, sondern weit übertroffen haben, und dass nichts mehr zu wünschen bleibt, um die Genauigkeit der Versuche der Schärfe der astronomischen Beobachtungen gleich zu machen, als ein gegen die Einwirkung von nahem Eisen und Luftzug völlig geschütztes Local. Es stehen zwei Apparate zu Gebote, die sich durch ihre Einfachheit nicht minder als durch die Genauigkeit auszeichnen, welche sie gewähren. Die Beschreibung muss ich mir allerdings für eine andere Gelegenheit vorbehalten, während ich die zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus bis jetzt in unserer Sternwarte ausgeführten Versuche den Physikern in der vorliegenden Abhandlung übergebe.

[8] 1.

Zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen nehmen wir zwei magnetische Flüssigkeiten an: die eine nennen wir die nördliche, die andere die südliche. Wir setzen voraus, dass die Elemente der einen Flüssigkeit die der anderen anziehen, dass dagegen je zwei Elemente derselben Flüssigkeit sich gegenseitig abstossen, und dass sich jede der beiden Wirkungen im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung ändert. Es wird sich unten zeigen, dass die Richtigkeit dieses Gesetzes durch unsere Beobachtungen selbst bestätigt wird.

Diese Flüssigkeiten kommen nicht für sich vor, sondern nur verbunden mit den wägbaren Theilchen solcher Körper, welche den Magnetismus annehmen, und die Wirkungen jener äussern sich darin, dass sie die Körper entweder in Bewegung setzen oder dass sie die Bewegung, welche andere auf diese Körper wirkende Kräfte, z. B. die Schwerkraft, hervorrufen würden, hindern oder verändern.

Daher wird die Wirkung einer gegebenen Menge von magnetischer Flüssigkeit auf eine

Digitized by Google

gegebene Menge entweder derselben oder der anderen Flüssigkeit in einer gegebenen Entfernung vergleichbar sein mit einer gegebenen bewegenden Kraft, d. h. mit der Wirkung einer gegebenen beschleunigenden Kraft auf eine gegebene Masse, und da die magnetischen Flüssigkeiten selbst nur durch die Wirkungen, die sie hervorbringen, erkennbar sind, so müssen gerade diese zum Maasse jener dienen.

Damit wir jedoch dieses Maass auf bestimmte Begriffe zurückführen können, müssen vor allem für drei Grössenarten die Einheiten festgesetzt werden, nämlich die Einheit der Entfernungen, die Einheit der wägbaren Massen und die Einheit der beschleunigenden Kräfte. Für die dritte kann die Schwerkraft an dem Beobachtungsorte angenommen werden: wenn aber dies nicht zusagt, so muss ausserdem die Einheit der Zeit hinzutreten, und für uns wird diejenige beschleunigende Kraft = 1 sein, welche in der Zeiteinheit eine Aenderung der Geschwindigkeit des Körpers in der Richtung seiner Bewegung hervorbringt, die der Einheit gleichkommt.

Demgemäss wird die Einheit der Menge von nördlicher Flüssigkeit diejenige sein, deren abstossende Wirkung auf eine andere ihr gleiche und in der Einheit der Entfernung befindliche Menge der bewegenden Kraft = 1 ist, d. h. der Wirkung einer beschleunigenden Kraft = 1 auf eine Masse = 1; dasselbe [9] wird von der Einheit der Menge von südlicher Flüssigkeit gelten: bei dieser Bestimmung muss offenbar sowohl die wirkende Flüssigkeit, als auch die der Wirkung unterliegende in physischen Punkten vereinigt gedacht werden. Ueberdies aber muss man annehmen, dass die Anziehung zwischen gegebenen Mengen von verschiedenartigen Flüssigkeiten in gegebener Entfernung gleich sei der Abstossung zwischen den bezüglichen gleichen Mengen von gleichartigen Flüssigkeiten. Daher wird die Wirkung einer Menge m von nordmagnetischer Flüssigkeit auf eine Menge m' derselben Flüssigkeit in der Entfernung r (wobei jede der beiden Flüssigkeiten als in einem Punkte vereinigt vorausgesetzt wird) ausgedrückt durch $\frac{m\,m'}{r\,r}$, oder sie kommt einer bewegenden Kraft $= \frac{m\,m'}{r\,r}$ gleich, welche in der Richtung von der ersteren gegen die zweite Flüssigkeit wirkt, und augen-

Digitized by Google

scheinlich gilt diese Formel allgemein, wenn, was wir von jetzt ab immer festhalten wollen, eine Menge von südlicher Flüssigkeit als negativ angesehen wird, und ein negativer Werth der Kraft $\frac{m\,m'}{r\,r}$ Anziehung andeuten soll.

Wenn daher in einem physischen Punkte gleiche Mengen von nördlicher und südlicher Flüssigkeit sich gleichzeitig befinden, so wird davon überhaupt keine Wirkung entstehen, wenn aber ungleiche Mengen, so wird nur der Ueberschuss der einen, welchen wir freien Magnetismus (positiven oder negativen) nennen wollen, in Betracht kommen.

2.

Zu diesen grundlegenden Voraussetzungen müssen wir noch eine andere hinzufügen, welche von der Erfahrung überall bestätigt wird, dass nämlich jeder Körper, in welchem magnetische Flüssigkeiten vorhanden sind, immer eine gleiche Menge von jeder der beiden enthält. Ja die Erfahrung lehrt sogar, dass diese Annahme auch auf die kleinsten Theilchen eines solchen Körpers auszudehnen ist, welche noch durch unsere Sinne unterschieden werden können. Aber da nach dem, was wir am Ende des vorigen Artikels hervorgehoben haben, eine Wirkung nur insoweit vorhanden sein kann, als irgend eine Trennung der Flüssigkeiten stattfindet, so müssen wir nothwendig annehmen, dass diese durch so kleine Zwischenräume geschieht, dass sie unseren Messungen unzugänglich sind.

Ein magnetisirbarer Körper muss daher aufgefasst werden als die Vereinigung von unzähligen Partikelchen, von denen ein jedes eine gewisse Menge von nördlicher magnetischer Flüssigkeit [**10**] und eine eben so grosse von südlicher enthält, und zwar so, dass sie entweder gleichmässig unter einander vermischt sind (der Magnetismus verborgen ist) oder eine geringere oder grössere Trennung erlitten haben (der Magnetismus entwickelt ist), eine Trennung jedoch, welche niemals in ein Ueberfliessen der Flüssigkeit von einem Partikelchen auf ein anderes übergehen kann. Es macht keinen Unterschied, ob man annimmt, dass eine grössere Trennung von einer grösseren Menge der frei werdenden Flüssigkeiten herrührt oder von einem grösseren zwischen ihnen gelegenen Zwischenraum: offenbar aber muss ausser der Grösse der

Digitized by Google

Trennung gleichzeitig deren Richtung in Betracht kommen, denn je nachdem diese in den verschiedenen Theilchen des Körpers übereinstimmt oder nicht, wird eine grössere oder geringere Gesammtwirkung rücksichtlich der Punkte ausserhalb des Körpers entstehen können.

Wie auch immer aber die Vertheilung des freien Magnetismus innerhalb des Körpers sich verhalten mag, stets kann man an deren Stelle, infolge eines allgemeinen Theorems, nach einem bestimmten Gesetze eine andere Vertheilung auf der Oberfläche des Körpers allein einsetzen, welche nach aussen hin vollständig dieselben Kräfte ausübt wie jene, so dass ein irgendwo ausserhalb gelegenes Element von magnetischer Flüssigkeit genau dieselbe Anziehung oder Abstossung von der wirklichen Vertheilung des Magnetismus innerhalb des Körpers erfährt, wie von der auf der Oberfläche desselben gedachten*). Dieselbe Fiction kann man auf zwei Körper ausdehnen, welche nach Maassgabe des in ihnen entwickelten freien Magnetismus auf einander wirken, so dass für jeden von beiden die auf der Oberfläche gedachte Vertheilung an die Stelle der wirklichen inneren treten kann. Auf diese Weise können wir endlich der gewöhnlichen Sprechweise, welche z. B. dem einen Ende einer Magnetnadel ausschliesslich Nordmagnetismus, dem anderen Südmagnetismus zuschreibt, den wahren Sinn unterlegen, da offenbar diese Redewendung mit dem oben ausgesprochenen Grundsatz, den andere Erscheinungen unbedingt fordern, nicht im Einklang steht. Aber es mag hinreichen, dies hier nebenbei bemerkt zu haben; über den Lehrsatz selbst werden wir, da er für den vorliegenden Zweck nicht nothwendig ist, bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher uns auslassen.

3.

Der magnetische Zustand eines Körpers besteht in dem Verhältniss der Vertheilung des freien Magnetismus in den einzelnen Theilchen desselben. Hinsichtlich der Veränderlichkeit dieses Zustandes nehmen wir einen wesentlichen Unterschied zwischen den verschiedenen magnetisirbaren Körpern wahr. [11] Bei einigen, z. B. bei weichem Eisen, ändert

*) Vgl. Gauss, Allgemeine Lehrsätze u. s. w. Art. 36. Werke Bd. V. S. 240 (auch Ostwald's Klassiker, No. 2, S. 49).

Digitized by Google

sich jener Zustand infolge der geringsten Kraft sogleich, und wenn diese Kraft aufhört, kehrt der frühere Zustand zurück: dagegen bei anderen, zumal bei gehärtetem Stahl, muss die Kraft eine gewisse Stärke erreicht haben, bevor sie eine wahrnehmbare Aenderung des magnetischen Zustandes hervorrufen kann, und wenn die Kraft aufhört, so verbleibt entweder der Körper in dem erlangten Zustand oder er kehrt wenigstens nicht völlig in den früheren zurück. In den Körpern der ersteren Art ordnen sich daher die magnetischen Molekel so an, dass zwischen den magnetischen Kräften, welche theils von den Körpern selbst, theils von äusseren Ursachen herrühren, vollkommenes Gleichgewicht besteht, oder es unterscheidet sich wenigstens der Zustand kaum merklich von dem eben beschriebenen. Bei den Körpern der zweiten Art dagegen kann der magnetische Zustand auch ohne vollkommenes Gleichgewicht zwischen jenen Kräften dauernd sein, wofern nur stärkere äussere Kräfte ferngehalten werden. Wenn auch die Ursache dieser Erscheinung unbekannt ist, so kann man sich dieselbe doch so vorstellen, als ob die wägbaren Theile eines Körpers der zweiten Art der Bewegung der mit ihnen verbundenen magnetischen Flüssigkeiten ein der Reibung ähnliches Hinderniss entgegensetzen, ein Widerstand, der in weichem Eisen entweder gar nicht vorhanden oder nur sehr gering ist.

In der theoretischen Untersuchung erfordern diese beiden Fälle eine vollständig verschiedene Behandlung; aber in der gegenwärtigen Abhandlung wird nur von den Körpern der zweiten Art die Rede sein: bei den Versuchen, über welche wir sprechen wollen, wird die Unveränderlichkeit des Zustandes in den einzelnen Körpern eine Grundvoraussetzung sein, und man muss sich daher sorgfältig hüten, während der Versuche andere Körper, welche diesen Zustand ändern könnten, allzu nahe heranzubringen.

Jedoch ist eine gewisse Ursache der Aenderung vorhanden, der auch die Körper der zweiten Art unterworfen sind, nämlich die Wärme. Die Erfahrung lehrt unzweifelhaft, dass der magnetische Zustand eines Körpers sich mit seiner Temperatur ändert, jedoch so, dass, wenn der Körper nicht übermässig erwärmt gewesen ist, mit der früheren Temperatur auch der frühere magnetische Zustand zurückkehrt. Diese Abhängigkeit ist durch geeignete Versuche zu bestimmen, und wenn zu einem Versuch gehörige Beobachtungen bei ver-

Digitized by Google

schiedenen Temperaturen vorgenommen worden sind, so werden sie vor allem auf eine und dieselbe Temperatur zurückzuführen sein.

[12] 4.

Unabhängig von den magnetischen Kräften, welche wir einzelne hinreichend nahe Körper auf einander ausüben sehen, wirkt eine andere Kraft auf die magnetischen Flüssigkeiten, die wir, da sie überall auf der Erde sich offenbart, der Erdkugel selbst zuschreiben und daher Erdmagnetismus nennen. Auf eine doppelte Weise äussert sich diese Kraft: Körper der zweiten Art, bei denen der Magnetismus erregt ist, werden, wenn sie im Schwerpunkt unterstützt sind, nach einer bestimmten Richtung gedreht: in den Körpern der ersteren Art dagegen werden die magnetischen Flüssigkeiten durch jene Kraft von selbst geschieden, eine Scheidung, welche sehr bemerkbar gemacht werden kann, wenn man Körper von zweckmässiger Gestalt wählt und in zweckmässiger Lage aufstellt. Jede der beiden Erscheinungen wird durch die Auffassung erklärt, dass jene Kraft die nordmagnetische Flüssigkeit an jedem beliebigen Ort nach einer bestimmten Richtung hintreibt, die südmagnetische aber mit gleicher Stärke nach der entgegengesetzten. Die Richtung der ersteren wird immer verstanden, wenn wir von der Richtung des Erdmagnetismus reden; sie wird daher durch die Neigung zur Horizontalebene wie durch die Abweichung der Verticalebene, in welcher sie wirkt, von der Meridianebene bestimmt: jene heisst magnetische Meridianebene. Die Intensität des Erdmagnetismus aber ist durch die bewegende Kraft zu messen, welche er auf die Einheit der freien magnetischen Flüssigkeit ausübt.

Diese Kraft ist nicht nur an verschiedenen Orten der Erde verschieden, sondern auch an demselben Orte veränderlich, sowohl im Laufe der Jahrhunderte und Jahre, als auch im Laufe der Jahreszeiten und der Tagesstunden. Hinsichtlich der Richtung ist zwar diese Veränderlichkeit lange bekannt gewesen; aber hinsichtlich der Intensität hat sie bis jetzt nur im Laufe der Stunden eines Tages beobachtet werden können, da wir keine Hülfsmittel hatten, die sich für längere Zeiträume eigneten. Diesem Mangel wird in Zukunft die Zurückführung der Intensität auf absolutes Maass Abhülfe schaffen.

Digitized by Google

5.

Um die Wirkung des Erdmagnetismus auf magnetische Körper der zweiten Art (an solche hat man von jetzt ab immer zu denken) der Berechnung zu unterwerfen, fasse man einen solchen Körper als in unendlich kleine Theile getheilt auf; es sei dm das Element des freien Magnetismus in einem Theilchen, dessen Coordinaten in Bezug auf drei senkrecht zu einander stehende, im Körper feste Ebenen durch x, y, z [13] bezeichnet werden mögen: die Elemente der südlichen Flüssigkeit nehmen wir als negativ an. Alsdann ist zunächst klar, dass das über den ganzen Körper (ja sogar über jeden messbaren Theil des Körpers) genommene Integral $\int dm = 0$ sei. Wir wollen ferner $\int x\,dm = X$, $\int y\,dm = Y$ und $\int z\,dm = Z$ nennen, welche Grössen die Momente des freien Magnetismus in Bezug auf die drei Grundebenen oder in Bezug auf die senkrecht zu ihnen stehenden Axen heissen mögen. Da unter der Voraussetzung, dass a eine beliebige constante Grösse bezeichnet, $\int (x - a)\,dm = X$ wird, so erhellt, dass das Moment in Bezug auf eine gegebene Axe nur von deren Richtung, nicht aber von ihrem Anfang abhängt. Wenn wir durch den Coordinatenanfang eine vierte Axe ziehen, welche mit den ersten die Winkel A, B, C bildet, so wird das Moment des Elements dm in Bezug auf diese Axe $= (x \cos A + y \cos B + z \cos C)\,dm$ sein und ferner das Moment des freien Magnetismus im ganzen Körper

$$= X \cos A + Y \cos B + Z \cos C = V.$$

Setzt man

$$\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = M \text{ und}$$
$$X = M \cos \alpha;\quad Y = M \cos \beta;\quad Z = M \cos \gamma,$$

und zieht man eine fünfte Axe, welche mit den drei ersten die Winkel α, β, γ und mit der vierten den Winkel ω bildet, so wird, da infolge dieser Festsetzungen $\cos \omega = \cos A \cos \alpha + \cos B \cos \beta + \cos C \cos \gamma$ ist, $V = M \cos \omega$ sein. Diese fünfte Axe nennen wir einfach die magnetische Axe des Körpers, und von der Richtung derselben setzen wir voraus, dass sie zum positiven Werth der Wurzel $\sqrt{(XX + YY + ZZ)}$ gehört. Wenn die vierte Axe mit dieser magnetischen Axe zusammenfällt, so wird das Moment $V = M$, welches offenbar unter allen Momenten das grösste ist: das Moment in Bezug auf eine beliebige andere Axe

Digitized by Google

wird gefunden, indem man dieses grösste Moment (welches, so oft eine Zweideutigkeit nicht zu fürchten ist, einfach das Moment des Magnetismus genannt werden kann) mit dem Cosinus des Winkels zwischen dieser und der magnetischen Axe multiplicirt. Das Moment in Bezug auf eine beliebige senkrecht auf der magnetischen stehende Axe wird $= 0$, negativ aber in Bezug auf jede Axe, welche mit der magnetischen Axe einen stumpfen Winkel bildet.

Die magnetische Axe ist daher keine bestimmte Gerade, da sie durch jeden beliebigen Punkt gelegt werden kann, sondern nur eine bestimmte Richtung, mit andern Worten, es giebt unbegrenzt viele, unter einander parallele magnetische Axen. Wenn wir aus diesen irgend eine nach Belieben auswählen und ihr eine bestimmte Länge zuschreiben, so werden die Enden derselben Pole genannt, der eine der südliche, von dem aus, der andere der nördliche, nach welchem hin die Richtung der Axe geht.

[14] 6.[1])

Wenn auf die einzelnen Theilchen der magnetischen Flüssigkeiten eine Kraft von constanter Intensität und Richtung wirkt, so lässt sich die daraus hervorgehende Gesammtkraft auf den Körper leicht aus den statischen Grundsätzen ableiten, da bei den hier in Betracht kommenden Körpern jene Theilchen ihre flüssige Beschaffenheit gewissermaassen verloren haben und mit dem wägbaren Körper eine feste Masse bilden. Es möge auf ein beliebiges magnetisches Theilchen dm die bewegende Kraft $= P\,dm$ nach einer Richtung D wirken (wo für die Molekel der südlichen Flüssigkeit das negative Zeichen an sich schon die entgegengesetzte Richtung andeutet); es seien A und B zwei in der Richtung der magnetischen Axe liegende Punkte des Körpers und deren Entfernung $= r$, positiv genommen, wenn die magnetische Axe von A nach B hin gerichtet ist: alsdann sieht man leicht ein, dass, wenn zu diesen Kräften zwei neue hinzugefügt werden, jede $= \frac{PM}{r}$, von denen die eine auf A nach der Richtung D, die andere auf B nach der entgegengesetzten Richtung wirkt, zwischen all diesen Kräften Gleich-

1) S. Anm. 1.

Digitized by Google

gewicht sein wird. Deswegen werden die ersteren Kräfte zwei Kräften $= \frac{PM}{r}$ gleichwerthig sein, von denen die eine auf B nach der Richtung D, die andere auf A nach der entgegengesetzten Richtung wirkt, und offenbar können diese beiden Kräfte nicht in eine einzige vereinigt werden.

Wenn ausser der Kraft P eine andere ähnliche P' nach der Richtung D' auf die magnetischen Flüssigkeiten des Körpers wirkt, so können an deren Stelle wiederum zwei andere gesetzt werden, die entweder auf dieselben Punkte A und B oder allgemeiner auf andere Punkte A' und B' wirken, wofern nur $A'B'$ ebenfalls eine magnetische Axe ist, und zwar müssen, wenn man den Abstand $A'B' = r'$ macht, diese Kräfte $= \frac{P'M}{r'}$ sein, und auf B' nach der Richtung D', auf A' nach der entgegengesetzten wirken. Dasselbe gilt von mehreren.

Der erdmagnetischen Kraft kann man innerhalb eines so kleinen Raumes, wie ihn der den Versuchen zu unterwerfende Körper einnimmt, sicher überall eine constante, wenn auch mit der Zeit veränderliche Intensität und Richtung zuschreiben, daher kann man das, was wir soeben gesagt haben, auf sie anwenden. Aber es kann von Vortheil sein, gleich von Anfang an dieselbe in zwei Kräfte zu zerlegen, in eine horizontale $= T$ und in eine verticale $= T'$, die in unseren Gegenden nach unten gerichtet ist. [15] Da man für den Fall, dass man für die letztere zwei andere auf die Punkte A' und B' wirkende einsetzen will, den Punkt A' wie auch den Abstand $A'B' = r'$ nach Belieben annehmen darf, so wollen wir für A' den Schwerpunkt wählen und, indem wir das Gewicht des Körpers, d. i. die bewegende Kraft, der Schwere auf seine Masse mit p bezeichnen, $\frac{T'M}{p} = r'$ setzen. Hierdurch wird die Wirkung der Kraft T' aufgelöst in eine Kraft $= p$ auf A' nach oben und in eine andere gleichgrosse auf B' nach unten gerichtet, und da ferner die erstere offenbar durch die Schwerkraft selbst aufgehoben wird, so wird die Wirkung der Verticalcomponente einfach zurückgeführt auf die Verlegung des Schwerpunktes von A' nach B'. Uebrigens ist klar, dass für diejenigen Gegenden, wo die erdmagnetische Kraft einen spitzen Winkel mit der Verticalen

Digitized by Google

bildet, oder, anders ausgedrückt, wo ihr verticaler Theil das magnetische Nord-Fluidum nach oben treibt, eine ähnliche Verlegung des Schwerpunkts auf der magnetischen Axe nach dem Südpol hin stattfindet.

Bei dieser Auffassungsweise leuchtet von selbst ein, dass, was immer für Versuche mit einer Magnetnadel in einem einzigen magnetischen Zustande gemacht werden mögen, aus diesen allein die Inclination nicht abgeleitet werden kann, sondern dass die Lage des wirklichen Schwerpunktes anderswoher schon bekannt sein muss. Diese Lage pflegt bestimmt zu werden, bevor die Nadel magnetisirt wird: aber diese Art ist nicht sicher genug, da meistens eine Stahlnadel schon während ihrer Herstellung einen wenn auch schwachen Magnetismus annimmt. Es ist daher für die Bestimmung der Inclination nothwendig, dass durch eine zweckmässige Aenderung des magnetischen Zustandes der Nadel eine andere Verlegung des Schwerpunktes hervorgerufen werde. Damit diese von der ersteren möglichst verschieden werde, wird es nothwendig sein, die Pole umzukehren, wodurch eine doppelte Verlegung erhalten wird. Uebrigens kann die Verlegung des Schwerpunktes selbst bei Nadeln, welche die geeignetste Form haben und mit Magnetismus gesättigt sind, eine gewisse Grenze nicht überschreiten, die (für eine einfache Verschiebung) in unseren Gegenden ungefähr 0,4 mm beträgt, und in Gegenden, wo die verticale Kraft am grössten ist, unter 0,6 mm bleibt; daraus ersieht man gleichzeitig, eine wie grosse mechanische Feinheit bei den Nadeln erfordert wird, die zur Bestimmung der Inclination dienen sollen.

7.[2]

Wenn irgend ein Punkt C eines magnetischen Körpers als fest angenommen wird, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht, dass eine durch C, den Schwerpunkt und [16] die magnetische Axe gelegte Ebene mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt und dass ausserdem die Momente, mit denen die erdmagnetische Kraft und die Schwerkraft jene Ebene um den Punkt C zu drehen suchen, sich aufheben: die zweite Bedingung läuft darauf hinaus, dass, wenn T den horizontalen Theil der erdmagnetischen Kraft und i die Neigung der Magnetaxe

Digitized by Google

gegen die Horizontalebene bezeichnet, $TM \sin i$ gleich sei dem Producte aus dem Gewichte des Körpers in die Entfernung des verschobenen Schwerpunkts B' von der durch C gezogenen Verticallinie: offenbar muss diese Entfernung auf der südlichen oder nördlichen Seite liegen, je nachdem i eine Elevation oder Depression ist, und für $i = 0$ liegt B' in dieser Verticallinie selbst. Wenn der Körper um diese Verticallinie schon so bewegt worden ist, dass die magnetische Axe in die Verticalebene gelangt ist, deren magnetisches Azimuth, d. h. deren Winkel mit dem nördlichen Theil des magnetischen Meridians (nach Belieben nach Osten oder nach Westen als positiv genommen) $= u$ ist, so wird der Erdmagnetismus auf den um die Verticalaxe drehbaren Körper eine Kraft ausüben, welche den Winkel u zu vermindern strebt und deren Moment $= TM \cos i \sin u$ sein wird, und der Körper wird um diese Axe Schwingungen ausführen, deren Dauer nach bekannten Methoden berechnet werden kann. Wenn man nämlich durch K das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Schwingungsaxe bezeichnet (d. h. die Summe der wägbaren Molekeln multiplicirt mit dem Quadrat der Abstände von der Axe) und wie üblich durch π den halben Kreisumfang für den Radius $= 1$, so wird die Dauer einer unendlich kleinen Schwingung

$$= \pi \sqrt{\frac{K}{TM \cos i}}$$

sein, falls nämlich den Grössen T und M als Einheit der beschleunigenden Kräfte diejenige zu Grunde liegt, welche in der Einheit der Zeit die Geschwindigkeit $= 1$ erzeugt: die Zurückführung endlicher Schwingungen auf unendlich kleine wird auf ähnliche Weise wie für die Schwingungen des Pendels berechnet werden können. Wenn daher die Dauer einer unendlich kleinen Schwingung aus der Beobachtung $= t$ gefunden worden ist, so werden wir die Gleichung haben: $TM = \frac{\pi\pi K}{tt \cos i}$, und wenn ausserdem, was wir von jetzt ab immer voraussetzen, der Körper so aufgehängt ist, dass die Magnetaxe horizontal ist:

$$TM = \frac{\pi\pi K}{tt}.$$

Wollte man lieber die Schwerkraft als Einheit der beschleunigenden Kräfte annehmen, so muss man jenen Werth durch

Digitized by Google

$\pi\pi\tau$ dividiren, wenn l die Länge [17] des einfachen Sekundenpendels bezeichnet, so dass man allgemein haben würde: $TM = \frac{K}{ttl\cos i}$ oder für unseren Fall $TM = \frac{K}{ttl}$.

8.[3]

Wenn derartige Versuche an Magnetnadeln angestellt werden, welche an einem senkrechten Faden aufgehängt sind, so wird die Rückwirkung, welche die Torsion ausübt, bei feineren Versuchen nicht vernachlässigt werden dürfen. Wir wollen bei einem derartigen Faden zwei horizontale Durchmesser unterscheiden, den einen D am unteren Ende, wo die Nadel angeknüpft ist, parallel der magnetischen Axe der Nadel, den anderen E am oberen Ende, wo der Faden befestigt ist, und zwar sei E mit D parallel im ungedrillten Zustande des Fadens. Wir wollen annehmen, dass mit dem magnetischen Meridian E den Winkel v, die Magnetaxe oder D dagegen den Winkel u bilde, dann wird nach der Erfahrung die Torsionskraft wenigstens annähernd dem Winkel $v-u$ proportional sein: wir werden daher das Moment, womit diese Kraft den Winkel u dem Winkel v gleich zu machen sucht, $= (v-u)\,\Theta$ setzen. Da nun das Moment der erdmagnetischen Kraft, welches den Winkel u zu vermindern strebt, $= TM\sin u$ ist, so ist die Bedingung für das Gleichgewicht in der Gleichung enthalten: $(v-u)\,\Theta = TM\sin u$, welche um so mehr reelle Lösungen zulassen wird, je kleiner Θ im Vergleich mit TM ist: so lange es sich aber hier nur um kleine Werthe von u handelt, kann man sicher statt dieser Gleichung die folgende annehmen: $(v-u)\,\Theta = TMu$ oder $\frac{v}{u} = \frac{TM}{\Theta} + 1$. Bei unseren Apparaten ist das obere Ende des Fadens an einem beweglichen Arm befestigt, welcher einen Zeiger trägt, der auf der Peripherie eines in Grade eingetheilten Kreises spielt. Wenn daher auch der Collimationsfehler (d. i. der Theilstrich, welchem der Werth $v = 0$ entspricht) noch nicht hinlänglich genau bekannt ist, so giebt dennoch dieser Zeiger den Unterschied je zweier Werthe von v an: ebenso liefert ein anderer Theil des Apparates den Unterschied zwischen den Werthen von u,

Digitized by Google

die dem Gleichgewichtszustande entsprechen, mit der grössten Genauigkeit, und es ist klar, dass der Werth von $\frac{TM}{\Theta} \div 1$ aus der Division des Unterschieds zwischen zwei Werthen von ε durch den Unterschied zwischen den entsprechenden Werthen von u erhalten wird. Wenn zwischen den zu diesem Zwecke anzustellenden Versuchen ein etwas längerer Zeitraum liegt, wird es zur Erreichung der grössten Genauigkeit nöthig sein, auf die tägliche Aenderung der magnetischen Declination Rücksicht 18' zu nehmen, was leicht erreicht wird mit Hülfe der gleichzeitigen Beobachtungen an einem zweiten Apparate, an welchem das obere Ende des Fadens unberührt bleibt; es ist wohl kaum nothwendig, daran zu erinnern, dass der Abstand zwischen den beiden Apparaten so gross sein muss, dass sie sich gegenseitig nicht merklich stören können.

Um zu zeigen, eine wie grosse Feinheit derartige Beobachtungen zulassen, führen wir ein Beispiel aus dem Tagebuch an. Es wurden am 22. September 1832, vorbehaltlich der Collimationsfehler, folgende Declinationen u und Winkel ε, beobachtet:

Versuche	Zeit	Erste Nadel		Zweite Nadel
		u	ε	u
I	9h 33 Vm	$+ 0° 4' 19.5''$	300°	$+ 6° 2 12.1''$
II	9 57	$- 0 0 19.6$	240	$- 0 1 37.7$
III	10 15	$- 0 4 40.5$	180	$- 0 1 18.8$

Es sind daher die Declinationen der ersten Nadel, bezogen auf den Stand der ersten Beobachtung, folgende:

I	$u = 0°\ 4'\ 19.5''$	$\varepsilon = 300°$
II	$+ 0\ 0\ 14.8$	240
III	$- 0\ 3\ 47.2$	180

Hieraus geht als Werth des Bruches $\frac{TM}{\Theta}$ aus der Verbindung der Beobachtungen

I und II	881,7
II und III	891,5
I und III	886,6 hervor.

*) Beide Theilungen wachsen von links nach rechts.

Digitized by Google

Die täglichen Aenderungen der magnetischen Declination werden durch die Torsion im Verhältniss der Einheit zu $\frac{n}{n+1}$ vermindert, wobei $\frac{TM}{\Theta} = n$ gesetzt ist, welche Aenderung, wenn wir Fäden von so geringer Torsion gebrauchen, wie sie das vorhergehende Beispiel zeigt, als unmerklich betrachtet werden kann. Was aber die Dauer der (unendlich kleinen) Schwingungen anbelangt, so kann aus den dynamischen Principien leicht geschlossen werden, dass diese im [19] Verhältniss der Einheit zu $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ durch die Torsion vermindert wird. Eigentlich bezieht sich dies auf den Fall, wo $v = 0$ ist. Die Formeln würden aber allgemein gelten, wenn wir $\frac{TM \cos u^0}{\Theta} = n$ setzen würden, wobei wir durch u^0 den Werth von u bezeichnen, der dem Gleichgewicht entspricht: aber der Unterschied wird sicherlich unmerklich sein.

9.

Der Coefficient Θ hängt wesentlich von der Länge, der Dicke und dem Stoff des Fadens ab, ausserdem bei Metallfäden etwas von der Temperatur, bei Seidenfäden von der Feuchtigkeit der Luft: dagegen scheint er bei jenen (vielleicht auch bei diesen, wenn sie einfach sind) durchaus nicht von dem Gewicht abzuhängen, womit sie belastet werden. Anders verhält sich aber die Sache bei mehrfachen Seidenfäden, wie man sie zum Tragen von schwereren Nadeln anwenden muss: bei diesen wächst Θ mit dem angehängten Gewichte, jedoch bleibt es weit kleiner, als der Werth von Θ für einen Metallfaden von ebenderselben Länge und Tragkraft. So ist z. B. durch eine ganz ähnliche Methode wie die im vorhergehenden Artikel entwickelte (aber bei einem anderen Faden und einer anderen Nadel) der Werth von $n = 597{,}4$ gefunden worden, während der Faden eine Nadel mit der gewöhnlichen Zurüstung allein trug, wo das gesammte Gewicht 496,2 g war; dagegen $= 424{,}8$, als das Gewicht bis zu 710,8 g vermehrt worden war, oder es war im ersten Falle $\Theta = 0{,}0016740\ TM$, im zweiten Falle $\Theta = 0{,}0023542\ TM$. Der Faden, dessen Länge 800 mm beträgt, ist aus 32 ein-

Digitized by Google

zelnen Fäden zusammengesetzt*, welche einzeln fast 30 g sicher tragen und so geordnet sind, dass sie eine gleiche Spannung erleiden. Uebrigens ist es wahrscheinlich, dass der Werth von Θ aus einem constanten Theil und einem dem Gewichte proportionalen Theile besteht, und dass der constante Theil gleich wird der Summe der Werthe von Θ für die einzelnen einfachen Fäden. Bei dieser Hypothese die durch Versuche bis jetzt noch nicht hinlänglich begründet ist, wird als constanter Werth für das angezogene Beispiel $= 0{,}0001012\ TM$ gefunden und daher als Werth von Θ für einen einfachen Faden $= 0.00000316\ TM$. Unter Zuhülfenahme des bald zu entwickelnden Werthes von TM wird aus dieser Hypothese berechnet, dass die Rückwirkung eines einfachen Fadens, der um einen Bogen gleich dem Radius (57° 18′ gedreht ist, der Schwere eines Milligramms gleichkommt, welches auf einen Hebelarm von der Länge von ungefähr $\frac{1}{17}$ mm drückt.

10.

Wenn der schwingende Körper eine einfache Nadel von regelmässiger Gestalt und homogener Masse ist, so kann das Trägheitsmoment K durch bekannte Methoden berechnet werden. Wenn z. B. der Körper ein rechtwinkliges Parallelepipedon ist, dessen Seiten a, b, c, dessen Dichtigkeit $= d$ und dessen Masse q daher $= abcd$ ist, so wird das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende und der Seite c parallele Axe $= \frac{1}{12}(aa + bb)q$ sein: und da bei Magnetnadeln von solcher Gestalt die Seite, welcher die Magnetaxe parallel ist, nämlich a, weit grösser an Länge zu sein pflegt als b, so wird für rohere Versuche es ausserdem genügen, $K = \frac{1}{12}aaq$ zu setzen. Aber bei feineren Versuchen würden wir auch dann, wenn eine einfache Nadel zur Anwendung kommt, kaum die bequeme Annahme einer vollkommen homogenen Masse und einer vollkommen regelmässigen Gestalt zulassen dürfen, und für unsere Versuche, wo nicht eine einfache Nadel, sondern eine mit verwickelterer Zurüstung verbundene Nadel schwingt, ist es überhaupt

*) Genau genommen sind diese Fäden nicht wirklich einfach, sondern nur solche, welche von den Kaufleuten als ungesponnene verkauft werden.

Digitized by Google

unmöglich, die Sache durch eine solche Rechnung zu ermitteln, und es war vielmehr ein anderes Verfahren zur genauen Bestimmung des Momentes K aufzusuchen.

Mit der Nadel wurde ein hölzerner Querstab verbunden, an welchem zwei gleiche Gewichte hingen, die vermittelst sehr feiner Spitzen auf die Punkte A und B des Stabes drückten: diese Punkte befanden sich auf einer horizontalen Geraden, in derselben Verticalebene wie die Aufhängungsaxe und waren von dieser beiderseits gleichweit entfernt. Bezeichnet man die Masse eines jeden der beiden Gewichte durch p und die Entfernung AB durch $2r$, so wird durch Hinzukommen dieses Apparates das Moment K um die Grösse $C + 2prr$ vermehrt werden, wo C die Summe des Moments des Stabes in Bezug auf die Aufhängungsaxe und der Momente der Gewichte in Bezug auf die verticalen durch die Spitzen und die Schwerpunkte gehenden Axen ist. Wenn daher die Schwingungen der unbelasteten und in zwei verschiedenen Entfernungen belasteten Nadel, nämlich für $r = r'$ und $r = r''$, beobachtet und die Schwingungsdauern (nachdem sie auf unendlich kleine Amplituden zurückgeführt und von der Wirkung der Torsion befreit sind) bzw. $= t, t', t''$ gefunden worden sind, so werden sich aus der Verbindung der Gleichungen:

[21]
$$\begin{aligned} TMtt &= \pi\pi K \\ TMt't' &= \pi\pi(K + C + 2pr'r') \\ TMt''t'' &= \pi\pi(K + C + 2pr''r'') \end{aligned}$$

die drei Unbekannten TM, K und C bestimmen lassen. Eine noch grössere Genauigkeit werden wir erreichen, wenn wir für mehrere Werthe von r, nämlich $r = r', r'', r'''$ u. s. w., die zugehörigen Schwingungsdauern t', t'', t''' u. s. w. beobachten und nach der Methode der kleinsten Quadrate die zwei Unbekannten x und y so bestimmen, dass möglichst genau den Gleichungen genügt wird:

$$t' = \sqrt{\frac{r'r' + y}{x}}$$

$$t'' = \sqrt{\frac{r''r'' + y}{x}}$$

$$t''' = \sqrt{\frac{r'''r''' + y}{x}} \quad \text{u. s. w.}$$

Digitized by Google

Dadurch werden wir nämlich erhalten:

$$TM = 2\pi\pi\, px$$
$$K + C = 2py.$$

Bezüglich dieser Methode ist das Folgende zu bemerken:

I. Wenn eine nicht allzuglatte Nadel angewandt wird, reicht es hin, den Holzstab einfach auf dieselbe aufzulegen. Wenn aber die Oberfläche sehr glatt ist, so dass die Reibung ein Gleiten des Stabes nicht hindern kann, ist es nothwendig, damit der ganze Apparat wie ein einziger fester Körper sich bewege, den Stab mit dem übrigen Apparat fester zu verbinden. In beiden Fällen ist aber dafür Sorge zu tragen, dass die Punkte A und B hinreichend genau in einer horizontalen Geraden sich befinden.

II. Da die Gesammtheit solcher Versuche einige Stunden erfordert, darf die Veränderlichkeit des Erdmagnetismus innerhalb dieses Zeitraums, wenigstens wenn die grösste Genauigkeit gewünscht wird, nicht vernachlässigt werden. Bevor daher die Elimination vorgenommen wird, muss man die beobachteten Zeiten auf einen constanten Werth von T, z. B. auf den mittleren Werth zurückführen, welcher dem ersten Versuche entspricht. Zu diesem Zwecke sind gleichzeitige Beobachtungen an einer anderen Nadel (ebenso wie im Artikel 8) nothwendig; wenn diese als Dauer einer Schwingung für die mittleren Zeiten der einzelnen Versuche bzw. ergeben haben $= u, u', u'', u'''$ [**22**] u. s. w., so sind zur Berechnung anstatt der beobachteten Werthe t', t'', t''' u. s. w. bzw. folgende anzuwenden: $\frac{ut'}{u'}, \frac{ut''}{u''}, \frac{ut'''}{u'''}$ u. s. w.

III. Eine ähnliche Bemerkung gilt bezüglich der Veränderlichkeit von M, die von der Veränderung der Temperatur, wenn diese während der Versuche stattgefunden, herrührt. Aber es ist klar, dass die soeben beschriebene Zurückführung schon an und für sich diese Verbesserung einschliesst, wenn jede der beiden Nadeln der gleichen Temperaturänderung unterworfen gewesen ist, und auf gleiche Weise von einer solchen Aenderung beeinflusst wird.

IV. Wenn es sich nur um die Ermittelung des Werthes von TM handelt, ist offenbar der erste Versuch überflüssig. Jedoch wird es nützlich sein, den mit einer belasteten Nadel angestellten Versuchen einen anderen mit einer unbelasteten Nadel anzuschliessen, damit zugleich der Werth von K daraus

Digitized by Google

hervorgehe, so dass dieser Versuchen zu Grunde gelegt werden kann, die zu einer anderen Zeit mit derselben Nadel angestellt werden, da offenbar dieser Werth unveränderlich bleibt, auch wenn T und M im Laufe der Zeit eine Veränderung erleiden.

11.

Zur besseren Erläuterung dieser Methode fügen wir aus der grossen Menge der Anwendungen ein Beispiel hier an. Die am 11. September 1832 angestellten Versuche haben folgende Tabelle ergeben:

Versuche	Gleichzeitige Schwingungen der ersten Nadel		der zweiten Nadel
	Belastung	eine Schwingung	eine Schwingung
I	$r = 180^{mm}$	24,63956″	17,32191″
II	$r = 130$	20,77576	17,32051
III	$r = 80$	17,66798	17,31653
IV	$r = 30$	15,80310	17,30529
V	ohne Belastung	15,22990	17,31107

Die Zeiten sind an einer Uhr beobachtet worden, welche täglich 14,24″ mittlere Zeit zurückblieb, jedes der beiden Gewichte betrug 103,2572 g; die Entfernungen r in mm sind mit mikroskopischer Genauigkeit bestimmt worden; [**23**] die Dauer einer Schwingung, die zum mindesten aus 100 Schwingungen (bei dem fünften Versuche sogar aus 677 für die erste Nadel) ermittelt wurden, hat bereits die Zurückführung auf unendlich kleine Bogen erhalten: übrigens sind diese Zurückführungen wegen der sehr kleinen Amplitude der Schwingungen*), die man an unseren Apparaten unbeschadet der grössten Genauigkeit anwenden kann, unmerklich. Wir wollen diese Schwingungszeiten zurückführen, zuerst auf den mittleren Werth von TM, der während des fünften Versuchs stattgefunden hat, unter Anwendung der Vorschriften des voranstehenden Artikels Nr. II; dann auf die Werthe, welche ohne Torsion sich ergeben hätten, durch Multiplication mit

*) So ist die Amplitude der Schwingungen beim ersten Versuche anfangs 0° 37′ 26″, am Schluss 0° 28′ 34″ gewesen; beim fünften Versuch anfangs 1° 10′ 21″, nach 177 Schwingungen 0° 45′ 35″, nach 677 Schwingungen 0° 6′ 44″.

Digitized by Google

$\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, wo n bei den vier ersten Versuchen $= 424{,}5$, beim fünften Versuch $= 597{,}4$ ist (vergl. Art. 9); endlich auf die mittlere Sonnenzeit durch Multiplication mit $\frac{864{,}00}{86\,385{,}76}$; hierdurch erhalten wir:

I	$24{,}65717'' = t'$	für $r' = 180^{\text{mm}}$
II	$20{,}79228'' = t''$	für $r'' = 130^{\text{mm}}$
III	$17{,}68610'' = t'''$	für $r''' = 80^{\text{mm}}$
IV	$15{,}82958'' = t''''$	für $r'''' = 30^{\text{mm}}$
V	$15{,}24515'' = t$	für die unbelastete Nadel.

Wenn wir für die Einheiten der Zeit, der Entfernung und der Masse die Secunde, das Millimeter und das Milligramm annehmen, so dass $p = 103\,257{,}2$ ist, leiten wir aus der Verbindung des ersten Versuchs mit dem vierten ab:

$$TM = 179\,641\,070;\quad K + C = 4\,374\,976\,000$$

und dann aus dem fünften Versuche

$$K = 4\,230\,282\,000 \text{ und ebenso } C = 144\,694\,000.$$

Wenn man aber alle Versuche zur Berechnung heranziehen will, so wird die Methode der kleinsten Quadrate am bequemsten auf folgende Weise angewandt. Wir gehen von den Näherungswerthen der Unbekannten x und y aus, die aus der Verbindung des ersten und vierten Versuchs hervorgehen, und indem wir die noch hinzuzufügenden Verbesserungen durch ξ und η bezeichnen, setzen wir:

[**24**]
$$x = 88{,}13646 + \xi$$
$$y = 21184{,}85 + \eta.$$

Hierdurch ergeben sich als berechnete Werthe der Zeiten t', t'', t''', t'''' durch bekannte Methoden:

$$t' = 24{,}65717 - 0{,}13988\,\xi + 0{,}00023008\,\eta$$
$$t'' = 20{,}78731 - 0{,}11793\,\xi + 0{,}00027291\,\eta$$
$$t''' = 17{,}69121 - 0{,}10036\,\xi + 0{,}00032067\,\eta$$
$$t'''' = 15{,}82958 - 0{,}08980\,\xi + 0{,}00035838\,\eta,$$

deren Vergleichung mit den beobachteten Werthen, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, die Resultate liefert:

$$\xi = -0{,}03230;\quad \eta = -12{,}38$$
$$x = 88{,}10416;\quad y = 21172{,}47.$$

Digitized by Google

Hieraus geht endlich hervor

$$TM = 179\,575\,250, \quad K + C = 4372\,419\,000,$$

und dann mit Hinzuziehung des ersten Versuchs:

$$K = 4228\,732\,400, \quad C = 143\,686\,600.$$

Ich lasse noch eine Vergleichung der Zeiten, die aus den verbesserten Werthen der Grössen x, y berechnet sind, mit den beobachteten folgen.

Versuche	Berechnete Zeit	Beobachtete Zeit	Unterschied
I	24,65884″	24,65717″	+ 0,00167″
II	20,78774	20,79228	— 0,00454
III	17,69046	17,68610	+ 0,00436
IV	15,82805	15,82958	— 0,00153

Die Länge des einfachen Secundenpendels in Göttingen setzen wir = 994,126 mm, daher wird die Schwere, durch diejenige Einheit der beschleunigenden Kräfte gemessen, welche den vorangehenden Berechnungen zu Grunde liegt, = 9811,63; wenn wir daher lieber die Schwerkraft selbst als Einheit nehmen wollen, so wird $TM = 18302{,}29$: diese Zahl drückt die Menge von Milligrammen aus, deren Druck unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einen Hebel von der Länge eines Millimeters der Kraft gleichkommt, mit welcher der Erdmagnetismus jene Nadel um die verticale Axe zu drehen sucht.

[25] 12.

Nachdem wir die Bestimmung des Productes der horizontalen Componente T der erdmagnetischen Kraft in das magnetische Moment M der gegebenen Nadel erledigt haben, gehen wir zum zweiten Theil der Untersuchung über, nämlich zur Bestimmung des Quotienten $\frac{M}{T}$. Hiezu werden wir gelangen durch Vergleichung der Wirkung dieser Nadel auf eine andere Nadel mit der Wirkung des Erdmagnetismus auf ebendieselbe, und zwar wird diese, wie bereits in der Einleitung auseinandergesetzt worden ist, entweder im Zustande der Bewegung oder im Zustande des Gleichgewichts beobachtet werden; jede der beiden Methoden haben wir häufig versucht: aber da die letztere aus mehreren Gründen der ersteren

Digitized by Google

weit vorzuziehen ist, so werden wir an dieser Stelle die Untersuchung auf jene beschränken, zumal da die erstere auf ähnliche Weise und ohne Schwierigkeit behandelt werden kann.

13.

Die Bedingungen des Gleichgewichts eines beweglichen Körpers, auf den beliebige Kräfte wirken, können durch das Princip der virtuellen Verrückungen leicht in eine einzige Formel zusammengezogen werden: es muss nämlich die Summe der Producte einer jeden Kraft multiplicirt in die Projection einer unendlich kleinen Verrückung ihres Angriffspunktes auf die Kraftrichtung so beschaffen sein, dass sie für keine virtuelle, d. h. mit den Bedingungen verträgliche Bewegung einen positiven Werth erlangen kann, so dass, wenn die virtuellen Bewegungen sämmtlich nach entgegengesetzten Richtungen möglich sind, jenes Aggregat, welches wir mit $d\Omega$ bezeichnen wollen, für jede virtuelle Bewegung $= 0$ ist.

Der bewegliche Körper, den wir hier betrachten, ist die Magnetnadel, die in einem Punkt G an einem drehbaren, oben festen Faden angeknüpft ist. Dieser Faden hindert nur, dass die Entfernung des Punktes G von dem festen Ende des Fadens grösser werden kann als die Länge des Fadens, so dass auch hier wie in dem Falle eines vollkommen freien Körpers die Lage des Körpers im Raume von sechs Veränderlichen und ferner das Gleichgewicht desselben von sechs Bedingungen abhängt. Da aber hier die Lösung des Problems nur zur Bestimmung des Bruches $\frac{M}{T}$ dienen soll, reicht die Betrachtung derjenigen virtuellen Bewegung hin, welche in der Drehung um die verticale, durch G [26] hindurchgehende Axe besteht, und offenbar wird man eine solche Axe als fest und nur den Winkel zwischen der verticalen Ebene, worin die magnetische Axe sich befindet, und der magnetischen Meridianebene als veränderlich betrachten können. Diesen Winkel wollen wir auf der nördlichen Seite des Meridians nach Osten zählen und durch u bezeichnen.

Digitized by Google

14.

Wir wollen uns das Volumen der beweglichen Magnetnadel in unendlich kleine Elemente getheilt denken, und es mögen die Coordinaten eines beliebigen Elements x, y, z, sowie e das in demselben enthaltene Element des freien Magnetismus sein. Den Anfang der Coordinaten legen wir in den willkürlichen, innerhalb der Nadel liegenden Punkt h auf der verticalen, durch G hindurchgehenden Geraden; die Axen der Coordinaten x und y sollen horizontal sein, jene in dem magnetischen Meridian nach Norden, diese nach Osten gerichtet, die Coordinate z zählen wir nach oben. Dann bringt die Wirkung des Erdmagnetismus auf das Element e den Theil $Te\,dx$ von $d\Omega$ hervor.

Auf ähnliche Weise werde das Volumen der zweiten festen Nadel in unendlich kleine Elemente getheilt und es mögen irgend einem Element die Coordinaten X, Y, Z, und die Menge E des freien Magnetismus entsprechen; endlich sei $r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}$. Unter dieser Festsetzung liefert die Wirkung des Elements E auf das Element e den Beitrag $\frac{eE\,dr}{r^n}$ zu der Summe $d\Omega$, wenn sie der Potenz r^n der Entfernung r umgekehrt proportional angenommen wird. Bezeichnet man durch N den Werth von u, welcher dem ungedrillten Zustande des Fadens entspricht, so wird das Moment der Torsionskraft des Fadens durch $\Theta(N-u)$ ausgedrückt werden können: diese Kraft kann so aufgefasst werden, als wenn auf jedes Ende eines durch G gelegten horizontalen Durchmessers des Fadens die Tangentialkraft $= \frac{\Theta(N-u)}{D}$ wirkte, wobei D diesen Durchmesser bezeichnet, und man ersieht daraus leicht, dass hiervon als Theil der Summe $d\Omega$ hervorgeht: $\Theta(N-u)\,du$.

Die Schwere der Theilchen der Nadel trägt offenbar zur Summe $d\Omega$ nichts bei, da u allein veränderlich ist: deswegen haben wir die Gleichung:

$$d\Omega = \Sigma Te\,dx + \Sigma \frac{eE\,dr}{r^n} + \Theta(N-u)\,du,$$

[27] wobei die Summation in dem ersten Gliede sich auf alle Elemente e, im zweiten auf alle Verbindungen der einzelnen e

Digitized by Google

mit den einzelnen E bezieht. Es ist daher klar, dass die Bedingung des stabilen Gleichgewichts darin besteht, dass

$$\Omega = \Sigma Tex - \Sigma \frac{eE}{(n-1)r^{n-1}} - \tfrac{1}{2}\Theta(N-u)^2$$

ein Maximum werde.

15.

Unserem Zweck entspricht es, die Versuche immer so einzurichten, dass die Magnetaxe einer jeden der beiden Nadeln horizontal ist und dass beide Nadeln sich ungefähr in derselben Höhe befinden: wir wollen daher die weiteren Rechnungen auf diese Voraussetzungen beschränken.

Wir wollen die Coordinaten der Punkte der ersten Nadel auf feste Axen in dieser beziehen, welche sich auch noch im Punkte h schneiden, und zwar liege die erste Axe in der Richtung der magnetischen Axe, die zweite horizontal und zur Rechten der ersten, die dritte vertical und nach oben gerichtet; die Coordinaten des Elements e in Bezug auf diese Axen seien a, b, c. Ebenso seien A, B, C die Coordinaten des Elements E in Bezug auf ähnliche feste Axen in der zweiten Nadel, die sich in einem Punkte H dieser Nadel schneiden: diesen Punkt wählen wir nahe bei der Mitte der Nadel und in derselben Höhe mit dem Punkte h.

Die Lage des Punktes H würde zwar am bequemsten durch die Entfernung vom Punkte h und die Richtung der sie verbindenden Geraden bestimmt, wenn es sich nur um einen Versuch handelte: da aber für unsern Zweck immer mehrere Versuche erforderlich sind, die sich auf verschiedene Lagen des Punktes H beziehen, welche zwar sämmtlich in derselben Geraden, jedoch nicht nothwendig in einer durch den Punkt h gehenden Geraden liegen, so ist es besser, die Zeichen gleich von Anfang an so einzurichten, dass das System derartiger Versuche von einer einzigen Unbekannten abhängt. Wir wollen daher den Punkt H auf einen willkürlichen Punkt h' in derselben Horizontalebene beziehen, der nahe bei h liegt und dessen Coordinaten α, β, 0 seien, und wollen die Entfernung $h'H = R$ und den Winkel der Geraden $h'H$ mit dem magnetischen Meridian $= \psi$ setzen. Wenn wir nun noch den Winkel der magnetischen Axe der zweiten Nadel mit dem magnetischen Meridian durch U bezeichnen, so werden wir haben:

Digitized by Google

28] $x = a \cos u - b \sin u$
$y = a \sin u + b \cos u$
$z = c$
$X = \alpha + R \cos \psi + A \cos U - B \sin U$
$Y = \beta + R \sin \psi + A \sin U + B \cos U$
$Z = C.$

So ist alles zur Entwickelung der Summe Ω und des Bruches $\frac{d\Omega}{du}$, der für die Gleichgewichtslage verschwinden muss, vorbereitet.

16.

Zunächst wird $\Sigma Tex = T \cos u \Sigma ae - T \sin u \Sigma be = mT \cos u$, wenn wir das Moment des freien Magnetismus der ersten Nadel Σae durch m bezeichnen, da ja $\Sigma be = 0$ ist: der Theil von $\frac{d\Omega}{du}$, der aus dem ersten Gliede von Ω hervorgeht, wird sein $= - mT \sin u$.

Wenn man der Kürze wegen setzt:

$k = \alpha \cos \psi + \beta \sin \psi + A \cos (\psi - U) + B \sin (\psi - U)$
$\quad - a \cos (\psi - u) - b \sin (\psi - u)$
$l = [\alpha \sin \psi - \beta \cos \psi + A \sin (\psi - U) - B \cos (\psi - U)$
$\quad - a \sin (\psi - u) - b \cos (\psi - u)]^2 + (C - c)^2,$

so wird $rr = (R + k)^2 + l$ sein.

Da bei verwerthbaren Versuchen R viel grösser sein muss, als die Dimensionen jeder der beiden Nadeln, so lässt sich die Grösse $\frac{1}{r^{n-1}}$ in die schnell convergente Reihe entwickeln:

$$R^{-(n-1)} - (n-1) k R^{-n} + \left(\frac{nn-n}{2} kk - \frac{n-1}{2} l\right) R^{-(n+1)}$$
$$- \left(\tfrac{1}{6} (n^3 - n) k^3 - \tfrac{1}{2} (nn - 1) kl\right) R^{-(n+2)} + \text{u. s. w.},$$

deren Gesetz, wenn es der Mühe werth wäre, leicht angegeben werden könnte. Die einzelnen Glieder der Summe $\Sigma \frac{eE}{r^{n-1}}$, welche nach Einsetzung der Werthe der Grössen k und l hervorgehen, werden einen Factor enthalten von der Form:

$$\Sigma e E a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} A^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'};$$

Digitized by Google

[29] derselbe ist dem Producte aus den Factoren $\Sigma e a^\lambda b^\mu c^\nu$ und $\Sigma E A^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'}$ gleich, die von dem magnetischen Zustande der ersten und zweiten Nadel bezüglich abhängen. Was wir mit Rücksicht hierauf festsetzen dürfen, beschränkt sich auf die Gleichungen:

$$\Sigma e = 0,\ \Sigma e a = m,\ \Sigma e b = 0,\ \Sigma e c = 0,$$
$$\Sigma E = 0,\ \Sigma E A = M,\ \Sigma E B = 0,\ \Sigma E C = 0,$$

wo wir durch M das magnetische Moment des freien Magnetismus der zweiten Nadel bezeichnen. In dem besonderen Falle, dass die Gestalt der ersteren Nadel (der beweglichen) und der Vertheilung des Magnetismus in der Längsrichtung symmetrisch ist, so dass sich immer zwei Elemente entsprechen, für welche a und e entgegengesetzte Werthe, b und c gleiche haben, wird, sobald der Mittelpunkt mit dem Punkte h zusammenfällt, immer $\Sigma e a^\lambda b^\mu c^\nu = 0$ für einen geraden Werth der Zahl $\lambda + \mu + \nu$ sein, und ähnliches gilt von der zweiten Nadel, wenn die Gestalt und die Vertheilung des Magnetismus in Beziehung auf den Punkt H symmetrisch ist. Im Allgemeinen werden daher in der Summe $\Sigma \frac{eE}{r^{(n-1)}}$ die Coefficienten der Potenzen $R^{-(n-1)}$ und R^{-n} verschwinden; in dem besonderen Falle, wo jede der beiden Nadeln symmetrisch gestaltet und symmetrisch magnetisirt ist, sowie gleichzeitig der Mittelpunkt der ersteren, h und h', zusammenfallen und ebenso der Mittelpunkt der letzteren und H, werden auch die Coefficienten der Potenzen $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$, $R^{-(n+6)}$ u. s. w. verschwinden; so oft jene Bedingungen sehr annähernd stattfinden, müssen sie wenigstens sehr klein werden. Das Hauptglied, welches aus der Entwickelung des zweiten Theils von Ω, nämlich von $-\Sigma \frac{eE}{(n-1)r^{(n-1)}}$ hervorgeht, wird sein:

$$= -\tfrac{1}{2} R^{-(n+1)} (n \Sigma e E k k - \Sigma e E l)$$
$$= m M R^{-(n+1)} \big(n \cos(\psi - U)\cos(\psi - u) - \sin(\psi - U)\sin(\psi - u)\big).$$

Hieraus folgt, dass der Theil von $\frac{d\Omega}{du}$, welcher der Einwirkung der zweiten Nadel entspricht, durch folgende Reihe ausgedrückt werden kann:

$$f R^{-(n+1)} + f' R^{-(n+2)} + f'' R^{-(n+3)} + \text{u. s. w.},$$

Digitized by Google

worin die Coefficienten rationale Functionen der Cosinus und Sinus der Winkel ψ, u, U und der Grössen α, β sind und überdies constante Grössen enthalten, die von dem magnetischen Zustande der Nadeln abhängen; und zwar wird sein:

$$f = mM(n\cos(\psi - U)\sin(\psi - u) + \sin(\psi - U)\cos(\psi - u)).$$

Die vollständige Entwickelung der folgenden Coefficienten f', f'' u. s. w. ist für unseren Zweck nicht nöthig; es genügt, zu bemerken, dass

[30] 1) im Falle der vollkommenen Symmetrie die soeben angedeuteten Coefficienten f', f''' u. s. w. verschwinden;

2) wenn die übrigen Grössen unverändert bleiben und ψ um zwei Rechte vermehrt wird (oder was dasselbe ist, wenn die Entfernung R auf derselben, rückwärts verlängerten Geraden auf der anderen Seite des Punktes h' genommen wird), die Coefficienten f, f'', f'''' u. s. w. ihre Werthe beibehalten, dagegen f', f''', f^{v} u. s. w. entgegengesetzte Werthe annehmen, oder dass die Reihe übergeht in

$$fR^{-(n+1)} - f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} - \text{u. s. w.};$$

dies wird leicht daraus geschlossen, dass durch jene Aenderung von ψ, k in $-k$ übergeht, l aber nicht geändert wird.

17. [5])

Die Bedingung, dass die bewegliche Nadel durch das Zusammenwirken der Kräfte nicht um die verticale Axe gedreht werde, wird daher in der folgenden Gleichung zusammengefasst:

$$0 = -mT\sin u + fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} + \text{u. s. w.} - \Theta(u - N).$$

Da leicht bewirkt werden kann, dass der Werth von N, wenn nicht $= 0$, doch wenigstens sehr klein ist, und auch u für die Versuche, um welche es sich hier handelt, innerhalb enger Grenzen bleibt, so wird man für das Glied $\Theta(u - N)$, ohne einen merklichen Fehler befürchten zu müssen, $\Theta\sin(u - N)$ einsetzen können, um so mehr, als $\frac{\Theta}{mT}$ ein sehr kleiner Bruch ist. Es möge u^{o} der Werth von u sein, der dem

Digitized by Google

Gleichgewicht der ersten Nadel in Abwesenheit der zweiten entspricht, oder es sei

$$m\,T \sin u^0 + \Theta \sin (u^0 - N) = 0;$$

hieraus folgt leicht

$$m\,T \sin u + \Theta \sin (u - N) = (m\,T \cos u^0 + \Theta \cos (u^0 - N)) \sin (u - u^0),$$

wo man an die Stelle des ersten Factors unbedenklich $m\,T + \Theta$ annehmen kann. So wird unsere Gleichung:

$$(m\,T + \Theta) \sin (u - u^0) = f R^{-(n+1)} + f' R^{-(n+2)} + f'' R^{-(n+3)} + \text{u. s. w.}$$

Wenn wir das Glied $f R^{-(n+1)}$ allein beibehalten, liegt die Lösung auf der Hand, wir haben nämlich

$$\operatorname{tg} (u - u^0) = \frac{m\,M (n \cos (\psi - U) \sin (\psi - u^0) + \sin (\psi - U) \cos (\psi - u^0)) R^{-(n+1)}}{m\,T + \Theta + m\,M (n \cos (\psi - U) \cos (\psi - u^0) - \sin (\psi - U) \sin (\psi - u^0)) R^{-(n+1)}}$$

wo wir im Nenner den Theil, der den Factor $R^{-(n+1)}$ enthält, mit ebendemselben Rechte unterdrücken oder setzen können:

[31]
$$\operatorname{tg} (u - u^0) = \frac{m\,M}{m\,T + \Theta} (n \cos (\psi - U) \sin (\psi - u^0) + \sin (\psi - U) \cos (\psi - u^0)) R^{-(n+1)} = F R^{-(n+1)}.$$

Wenn wir aber die weiteren Glieder berücksichtigen wollen, so ist klar, dass $tg\,(u - u^0)$ in eine Reihe folgender Gestalt entwickelt werden kann:

$$\operatorname{tg} (u - u^0) = F R^{-(n+1)} + F' R^{-(n+2)} + F'' R^{-(n+3)} + \text{u. s. w.},$$

worin, wie eine leichte Ueberlegung lehrt, die Coefficienten F, F', F'' u. s. w. bis zum Coefficienten der Potenz $R^{-(2n+1)}$ einschliesslich bezüglich aus

$$\frac{f}{m\,T + \Theta}, \quad \frac{f'}{m\,T + \Theta}, \quad \frac{f''}{m\,T + \Theta} \text{ u. s. w.},$$

durch Aenderung von u in u^0 entstehen; vom folgenden Gliede ab werden aber neue Theile hinzutreten, die wir jedoch für unseren Zweck nicht genauer zu verfolgen brauchen. Uebrigens kann augenscheinlich $u - u^0$ in eine Reihe von einer

Digitized by Google

ähnlichen Form entwickelt werden, die bis zur Potenz $R^{-(3n+2)}$ mit der Reihe für $\operatorname{tg}(u - u^0)$ zusammenfällt.

18.*)

Es ist nunmehr klar, dass, wenn die zweite Nadel in verschiedenen Punkten derselben Geraden aufgestellt wird, so dass ψ und U ihren Werth behalten, während R allein sich ändert, und die Ablenkungen der beweglichen Nadel von der Gleichgewichtslage, wobei die zweite Nadel entfernt ist, nämlich die Winkel $u - u^0$ beobachtet werden, hieraus die Werthe der Coefficienten F, F', F'' u. s. w., so viele noch bemerkbar sind, durch Elimination ermittelt werden können; hierdurch werden wir die Gleichung erhalten:

$$\frac{M}{T} = \left(1 + \frac{\Theta}{Tm}\right) \frac{F}{n\cos(\psi - U)\sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U)\cos(\psi - u^0)}$$

worin der Werth der Grösse $\frac{\Theta}{Tm}$ auf die Art und Weise gefunden werden kann, welche wir im Artikel 8 gelehrt haben. Aber für eine bequemere Ausführung wird es von Nutzen sein, das Folgende zu beachten:

I. An Stelle der Vergleichung von u mit u^0 verdient es den Vorzug, je zwei entgegengesetzte Ablenkungen mit einander zu vergleichen, durch Umkehr der Lage der zweiten Nadel, so nämlich, dass R und ψ unverändert bleiben und der Winkel U um zwei Rechte vermehrt wird. Sind die Werthe von u, welche diesen Stellungen entsprechen, durch u' und u'' bezeichnet, so müsste im Falle der vollkommenen Symmetrie genau $u'' = -u'$ sein, wenn zugleich $u^0 = 0$ wäre. Aber es ist überflüssig, [32] diese Bedingungen ängstlich innezuhalten, da klar ist, dass u' und u'' durch ähnliche Reihen bestimmt werden, worin die ersten Glieder genau entgegengesetzte Werthe haben, und ferner auch $\frac{1}{2}(u' - u'')$, ebenso $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(u' - u'')$ durch eine ähnliche Reihe, worin der Coefficient des ersten Gliedes genau $= F$ ist.

II. Noch besser wird es sein, stets je vier Versuche zu verbinden, nachdem auch der Winkel ψ um zwei Rechte verändert oder der Abstand R auf der anderen Seite genommen worden ist. Wenn den beiden letzteren Versuchen die Werthe

*) S. Anm. 5, Schluss.

Digitized by Google

u''' und u'''' entsprechen, so wird auch die Differenz $\frac{1}{2}(u''' - u'''')$ durch eine ähnliche Reihe ausgedrückt werden, deren erstes Glied ebenfalls einen Coefficienten $= F$ haben wird. Es ist zu beachten (was aus dem Vorhergehenden leicht gefolgert wird), dass, wenn n eine ungerade Zahl wäre, die Coefficienten F, F'', F'''' u. s. w. bis ins Unendliche in jeder Reihe für $u' - u^0$ und $u''' - u^0$ genau gleich, und die Coefficienten F', F''', F^{v} u. s. w. bis ins Unendliche genau entgegengesetzt sein würden, und ebenso für $u'' - u^0$ und $u'''' - u^0$, so dass in der Reihe für $u' - u'' + u''' - u''''$ die abwechselnden Glieder verschwinden würden. Aber im Falle der Wirklichkeit, wo $n = 2$, ist, um allgemein zu reden, eine solche Beziehung zwischen den Reihen für $u' - u^0$ und $u''' - u^0$ strenge nicht vorhanden, da schon für die Potenz R^{-6} nicht genau entgegengesetzte Coefficienten sich ergeben; jedoch kann gezeigt werden, dass auch für dieses Glied eine vollständige Aufhebung in der Verbindung $u' - u'' + u''' - u''''$ eintritt, so dass $\mathrm{tg}\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''')$ die Form hat:

$$L R^{-3} + L' R^{-5} + L'' R^{-7} + \text{u. s. w.}$$

oder allgemeiner, wenn wir einstweilen den Werth von n noch unbestimmt lassen, die folgende Form:

$$L R^{-(n+1)} + L' R^{-(n+3)} + L'' R^{-(n+5)} + \text{u. s. w.},$$

worin $L = F$ ist.

III. Es wird dienlich sein, die Winkel ψ und U so zu wählen, dass kleine Fehler, die beim Messen derselben begangen worden sind, den Werth von F nicht merklich verändern. Zu diesem Zweck muss der Werth von U für einen gegebenen Werth von ψ so angenommen werden, dass F ein Maximum wird, es muss nämlich:

$$\mathrm{ctg}\,(\psi - U) = n\,\mathrm{tg}\,(\psi - u^0)$$

sein. Dann wird

$$F = \pm \frac{mM}{mT + \Theta} \sqrt{(nn \sin(\psi - u^0)^2 + \cos(\psi - u^0)^2)}.$$

[33] Der Winkel ψ ist aber so zu wählen, dass dieser Werth von F entweder ein Maximum oder ein Minimum werde: jenes geschieht für $\psi - u^0 = 90^0$ oder 270^0, in welchen Fällen $F = \pm \frac{nmM}{mT + \Theta}$ ist, dieses für $\psi - u^0 = 0$ oder 180^0, wo $F = \pm \frac{mM}{mT + \Theta}$ ist.

Digitized by Google

19.

Es stehen daher zwei Methoden zur Verfügung, die für die Ausführung am meisten sich eignen. Die Elemente derselben soll das folgende Schema zeigen.

Erste Methode.

Von der zweiten Nadel liegt sowohl der Mittelpunkt als auch die Axe in der zum magnetischen Meridian*) senkrechten Geraden.

Ablenkung	Lage der Nadel		Mittelpunkt nach	Nordpol nach
$u = u'$	$\psi = 90^\circ$	$U = 90^\circ$	Osten	Osten
$u = u''$	$\psi = 90$	$U = 270$	Osten	Westen
$u = u'''$	$\psi = 270$	$U = 90$	Westen	Osten
$u = u''''$	$\psi = 270$	$U = 270$	Westen	Westen

Zweite Methode.

Von der zweiten Nadel liegt der Mittelpunkt im magnetischen Meridian.

Ablenkung	Lage der Nadel		Mittelpunkt nach	Nordpol nach
$u = u'$	$\psi = 0^\circ$	$U = 270^\circ$	Norden	Westen
$u = u''$	$\psi = 0$	$U = 270$	Norden	Osten
$u = u'''$	$\psi = 180$	$U = 90$	Süden	Westen
$u = u''''$	$\psi = 180$	$U = 90$	Süden	Osten

[34] Wenn man dann $\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''') = v$ und $\operatorname{tg} v = LR^{-(n+1)} + L'R^{-(n+3)} + L''R^{-(n+5)} +$ u. s. w. setzt, so wird für die erste Methode

$$L = \frac{nmM}{mT + \Theta},$$

für die zweite

$$L = \frac{mM}{mT + \Theta} \text{ sein.}$$

*) Genauer, zu der Verticalebene, welcher der Werth $u = u^\circ$ entspricht, d. h. in welcher die Magnetaxe sich im Gleichgewicht befindet, wenn die zweite Nadel nicht da ist. Uebrigens kann in der Praxis die Differenz sowohl wegen der Kleinheit, als auch gerade wegen des Verhältnisses, wovon wir im vorhergehenden Artikel III ausgegangen sind, sicher vernachlässigt werden.

Digitized by Google

20.

Aus der Theorie der Elimination wird leicht geschlossen, dass die Rechnung wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler um so ungenauer ist, je mehr Coefficienten man durch die Elimination bestimmen muss. Deswegen ist die im Artikel 18, II vorgeschriebene Methode sehr zu schätzen, weil sie die Coefficienten $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$ unterdrückt. Im Falle der vollkommenen Symmetrie würden zwar diese Coefficienten schon von selbst herausfallen, aber es wäre zu unsicher, sich darauf zu verlassen. Uebrigens würde eine kleine Abweichung von der Symmetrie bei weitem von geringerem Einfluss sein bei der ersten Methode, als bei der zweiten, und wenn man bei jener wenigstens dafür sorgt, dass der Punkt h', von dem aus die Entfernungen gemessen werden, hinreichend genau in dem durch den Punkt h gehenden magnetischen Meridian liegt, wird sich kaum ein merklicher Unterschied zwischen $u' - u''$ und $u''' - u''''$ zeigen. Aber das verhält sich anders bei der zweiten Methode, zumal wenn der Apparat eine excentrische Aufhängung erfordert. Durch diese Methode wird man, so oft der Raum keine Beobachtungen von beiden Seiten gestattet, immer eine weit geringere Genauigkeit erreichen. Ausserdem ist die erste Methode auch deswegen besonders vorzuziehen, weil sie einen doppelt so grossen Werth von L ergiebt als die zweite, da im Falle der Wirklichkeit $n = 2$ ist. Wenn man übrigens bei der zweiten Art das von $R^{-(n+2)}$ abhängende Glied im Falle der excentrischen Aufhängung so viel wie möglich fortschaffen will, so ist der Punkt h' so zu wählen, dass der Mittelpunkt der Nadel (für $u = u^0$) in der Mitte zwischen h und h' liegt: die Rechnung jedoch, welche dies gelehrt hat, muss ich der Kürze halber hier unterdrücken.

21.

Bei den vorstehenden Rechnungen haben wir den Exponenten n unbestimmt gelassen: an den Tagen vom 24.—28. Juni 1832 haben wir zwei Reihen von Versuchen ausgeführt, [**35**] unter Ausdehnung auf so grosse Entfernungen, als der Raum gestattete, durch welche auf's Einleuchtendste sich zeigen wird, welchen Werth die Natur fordert. Bei der ersten Reihe wurde die zweite Nadel (nach der ersten Methode des

Digitized by Google

rtikels 19) auf einer senkrecht zu dem magnetischen Me-
dian stehenden Geraden, bei der zweiten Reihe der Mittel-
unkt der Nadel im Meridian selbst angebracht. Hier ist
ine Uebersicht dieser Versuche, wobei die Entfernungen R
n Theilen des Meters ausgedrückt und die Werthe des Win-
:els $\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''')$ für die erste Reihe durch v,
ür die zweite durch v' bezeichnet sind.

R	v	v'
1,1m		1° 57′ 24,8″
1,2		1 29 40,5
1,3	2° 13′ 51,2″	1 10 19,3
1,4	1 47 28,6	0 55 58,9
1,5	1 27 19,1	0 45 14,3
1,6	1 12 7,6	0 37 12,2
1,7	1 0 9,9	0 30 57,9
1,8	0 50 52,5	0 25 59,5
1,9	0 43 21,8	0 22 9,2
2,0	0 37 16,2	0 19 1,6
2,1	0 32 4,6	0 16 24,7
2,5	0 18 51,9	0 9 36,1
3,0	0 11 0,7	0 5 33,7
3,5	0 6 56,9	0 3 28,9
4,0	0 4 35,9	0 2 22,2

Diese Zahlen zeigen schon bei oberflächlichem Anblick, dass für grössere Werthe sowohl die Zahlen der zweiten Reihe annähernd doppelt so gross sind als die Zahlen der dritten, sowie auch dass die Zahlen einer jeden Reihe annähernd im umgekehrten Verhältniss des Cubus der Entfernungen stehen, so dass bezüglich der Richtigkeit des Werthes $n = 2$ kein Zweifel bleiben kann. Um dieses Gesetz noch mehr bei den einzelnen Versuchen zu bestätigen, haben wir sämmtliche Zahlen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, woraus die folgenden Werthe der Coefficienten hervorgegangen sind:

$$\text{tg } v = 0{,}086870\ R^{-3} - 0{,}002185\ R^{-5}$$

$$\text{tg } v' = 0{,}043435\ R^{-3} + 0{,}002449\ R^{-5}.$$

[36] Nachstehende Uebersicht zeigt die Vergleichung der nach diesen Formeln berechneten Werthe mit den beobachteten.

Digitized by Google

Berechnete Werthe.

R	v	Unterschied	v'	Unterschied
1,1m			1° 57′ 22,0″	+ 2,8″
1,2			1 29 46,5	— 6,0
1,3	2° 13′ 50,4″	+ 0,8″	1 10 13,3	+ 6,0
1,4	1 47 24,1	+ 4,5	0 55 58,7	+ 0,2
1,5	1 27 28,7	— 9,6	0 45 20,9	— 6,6
1,6	1 12 10,9	— 3,3	0 37 15,4	— 3,2
1,7	1 0 14,9	— 5,0	0 30 59,1	— 1,2
1,8	0 50 48,3	+ 4,2	0 26 2,9	— 3,4
1,9	0 43 14,0	+ 7,8	0 22 6,6	+ 2,6
2,0	0 37 5,6	+ 10,6	0 18 55,7	+ 5,9
2,1	0 32 3,7	+ 0,9	0 16 19,8	+ 4,9
2,5	0 19 2,1	— 10,2	0 9 38,6	— 2,5
3,0	0 11 1,8	— 1,1	0 5 33,9	— 0,2
3,5	0 6 57,1	— 0,2	0 3 29,8	— 1,0
4,0	0 4 39,6	— 3,7	0 2 20,5	+ 1,7

22.

Die vorstehenden Versuche sind hauptsächlich in der Absicht unternommen worden, das Gesetz der magnetischen Wirkung gegen jeden Zweifel sicher zu stellen, ferner um zu prüfen, wie viele Glieder der Reihe zu berücksichtigen sind und welche Genauigkeit die Versuche zulassen. Sie haben gelehrt, dass, wenn wir die Entfernungen nicht kleiner nehmen als das Vierfache der Länge der Nadeln, zwei Glieder hinreichen*). Uebrigens dürfen die Unterschiede, welche die Berechnung ergeben hat, keineswegs bloss für Beobachtungsfehler [**37**] gehalten werden: denn mehrere Vorsichtsmaassregeln, von deren Anwendung man eine grössere Uebereinstimmung erwarten darf, waren damals noch nicht vorbereitet. Hierher sind die Verbesserungen wegen der stündlichen Veränderlichkeit der Intensität des Erdmagnetismus zu zählen, auf welche man Rücksicht nehmen muss unter Anwendung einer anderen Vergleichsnadel, nach der Methode, über welche wir im Artikel 10, II gesprochen haben. Damit man jedoch den Werth des Erdmagnetismus kennen lerne, soweit er sich

*) Die Länge der bei diesen Versuchen angewandten Nadeln beträgt ungefähr 0,3m; wenn wir das Glied R^{-7} bei der Rechnung noch zu berücksichtigen versucht hätten, wäre die Genauigkeit eher vermindert als vermehrt worden.

Digitized by Google

is diesen Versuchen ableiten lässt, fügen wir eine Zusam-enstellung der übrigen hierher gehörigen Versuche hinzu.

Der Werth des Bruches $\frac{\Theta}{Tm}$ für die erste Nadel und en Faden, an welchem sie hing, ist nach der im Artikel 8 eschriebenen Methode $= \frac{1}{251,96}$ ermittelt worden.

Hieraus ergiebt sich daher:

$$\frac{M}{T} = 0,0436074.$$

Dieser Zahl liegt das Meter als Längeneinheit zu Grunde. Wenn wir als Einheit lieber das Millimeter nehmen, so ist diese Zahl mit dem Cubus von 1000 zu multipliciren, so dass

$$\frac{M}{T} = 43607400.$$

Für die zweite Nadel ergab sich durch Versuche, die am 28. Juni angestellt wurden und denen glichen, die wir für eine andere Nadel im Artikel 11 beschrieben haben, während Millimeter, Milligramm und die Secunde der mittleren Sonnenzeit als Einheiten genommen wurden,

$$TM = 135\,457\,900,$$

und hieraus, durch Elimination der Grösse M,

$$T = 1,7625.$$

23.

Wenn Versuche zu dem Zwecke angestellt werden, den absoluten Werth T des Erdmagnetismus zu bestimmen, ist es von grosser Bedeutung, dafür zu sorgen, dass die Gesammtheit dieser Versuche innerhalb nicht allzulanger Zeit erledigt werde, damit keine merkliche Aenderung des magnetischen Zustandes der hierzu verwandten Nadeln zu befürchten ist. Es wird sich daher empfehlen, bei der Beobachtung der Ablenkungen der beweglichen Nadel das erste Verfahren [38] des Artikel 20 allein anzuwenden, nachdem nur zwei verschiedene Abstände passend ausgewählt sind, vorausgesetzt dass zwei Glieder der Reihe hinreichen. Wir wählen aus mehreren Anwendungen dieser Methode hier eine als Beispiel aus und zwar diejenige, auf welche die peinlichste Sorgfalt

Digitized by Google

verwandt worden ist, indem die Abstände mit mikroskopischer Genauigkeit gemessen wurden.

Die Versuche sind am 18. September 1832 an zwei Apparaten angestellt worden, welche wir durch die Buchstaben A und B, und zwar mit drei Nadeln, die wir durch die Zahlen 1, 2, 3 bezeichnen wollen. Die Nadeln 1 und 2 sind dieselben, welche im Artikel 11 erste und zweite genannt wurden. Die Versuche scheiden sich in zwei Abtheilungen.

Zuerst wurden die gleichzeitigen Schwingungen der Nadel 1 im Apparat A und der Nadel 2 im Apparat B beobachtet. Als Dauer einer Schwingung, auf unendlich kleine Amplituden zurückgeführt, ging hervor

für die Nadel 1 . . 15,22450″
für die Nadel 2 . . 17,29995 ,

jene aus 305, diese aus 264 Schwingungen gefolgert.

Dann wurde die Nadel 3 im Apparat A aufgehängt, die Nadel 1 aber in der senkrecht auf dem magnetischen Meridian stehenden Geraden östlich wie auch westlich und beiderseits auf doppelte Weise angebracht und die Ablenkung der Nadel 3 für die einzelnen Lagen der Nadel 1 beobachtet. Diese Versuche, die in zwei verschiedenen Abständen R wiederholt wurden, ergaben die folgenden Werthe des Winkels v, dessen Bedeutung die gleiche wie in den Artikeln 19 u. 21 ist:

$R = 1{,}2^{\mathrm{m}}$ $\quad v = 3^{\circ}\ 42'\ 19{,}4''$
$R' = 1{,}6$ $\quad v' = 1\ \ 34\ \ 19{,}3.$

Auch während dieser Versuche wurden die Schwingungen der Nadel 2 im Apparat B beobachtet. Der mittleren Zeit entspricht der aus 414 Schwingungen berechnete Werth der Schwingungsdauer für unendlich kleine Bogen = 17,29484.

Die Zeiten wurden an einer Uhr beobachtet, deren tägliches Zurückbleiben 14,24″ betrug. Wenn M und m die Momente des freien Magnetismus für die Nadel 1 und 3 bezeichnen und Θ die Torsionsconstante des Fadens im Apparat A, während er die Nadel 1 oder 3 trug (das Gewicht derselben ist fast dasselbe), so haben wir:

[39] $$\frac{\Theta}{TM} = \frac{1}{597{,}4},$$

wie im Artikel 11

$$\frac{\Theta}{Tm} = \frac{1}{721{,}6};$$

weil die Nadel 3 stärker magnetisch war als die Nadel 1.

Digitized by Google

Das Trägheitsmoment der Nadel 1 war schon durch frühere Versuche bekannt (siehe Artikel 11), welche ergeben hatten: $K = 4228732400$, wobei das Millimeter und das Milligramm als Einheiten genommen sind.

Die Aenderung des Thermometers in beiden Sälen, wo die Apparate aufgestellt sind, während der ganzen Versuchszeit war so gering, dass es überflüssig ist, darauf Rücksicht zu nehmen.

Wir wollen nunmehr zur Berechnung dieser Versuche übergehen, um daraus die Intensität T des Erdmagnetismus abzuleiten. Die Ungleichheit der Schwingungen der Nadel 2 deutet auf eine geringe Aenderung dieser Intensität: damit daher von einem bestimmten Werthe die Rede sein kann, werden wir die beobachtete Dauer der Schwingungen der ersten Nadel auf den mittleren Zustand des Erdmagnetismus während des zweiten Theils der Beobachtungen zurückführen. Eine andere Zurückführung erfordert diese Dauer noch wegen des Zurückbleibens der Uhr und eine dritte wegen der Torsion des Fadens. Auf diese Weise geht als reducirte Dauer einer Schwingung hervor:

$$= 15{,}22450 \times \frac{17{,}29484}{17{,}29995} \cdot \frac{86400}{86385{,}76} \cdot \sqrt{\frac{598{,}4}{597{,}4}}$$

$$= 15{,}23500'' = t.$$

Hieraus folgt der Werth des Productes

$$TM = \frac{\pi\pi K}{tt} = 179\,770\,600.$$

Der geringe Unterschied zwischen diesem Werth und demjenigen, welchen wir oben Artikel 11 am 11. September gefunden haben, ist der Aenderung des Erdmagnetismus und auch derjenigen des magnetischen Zustandes der Nadel zuzuschreiben.

Aus den beobachteten Ablenkungen erhalten wir:

$$F = \frac{R'^5 \operatorname{tg} v' - R^5 \operatorname{tg} v}{R'R' - RR} = 113\,056\,200,$$

wenn wir das Millimeter zur Einheit nehmen, und daraus

[40] $$\frac{M}{T} = \tfrac{1}{2} F\left(1 + \frac{\Theta}{Tm}\right) = 56\,606\,437.$$

Digitized by Google

Die Vergleichung dieser Zahl mit dem Werthe von TM ergiebt endlich

$$T = 1{,}782088$$

als Werth der Intensität der horizontalen erdmagnetischen Kraft am 18. September um 5 Uhr.

24.

Die vorstehenden Versuche sind auf der Sternwarte gemacht worden, wobei der Platz für die Apparate derartig ausgesucht worden war, dass Eisen von der Nachbarschaft so viel wie möglich ferngehalten wurde. Nichts desto weniger kann nicht bezweifelt werden, dass die Eisenmassen, welche in den Wänden, den Fenstern und Thüren des Gebäudes reichlich zerstreut vorhanden sind, ja sogar auch die eisernen Bestandtheile der grösseren astronomischen Instrumente, in denen durch die erdmagnetische Kraft Magnetismus erregt wird, eine keineswegs unmerkliche Wirkung auf die aufgehängten Nadeln ausüben. Die daraus entstehenden Kräfte ändern nicht nur die Richtung, sondern auch die Intensität des Erdmagnetismus um einen kleinen Betrag, und unsere Versuche ergeben nicht den reinen Werth der Intensität des Erdmagnetismus, sondern den für den Ort des Apparats A modificirten Werth. Diese Modification muss, so lange die Eisenmassen an ihrem Orte bleiben und die Elemente des Erdmagnetismus selbst (nämlich die Intensität und die Richtung) sich nicht sehr erheblich ändern, merklich constant bleiben, welche Grösse ihr aber zukommt, ist zwar bis jetzt unbekannt, jedoch möchte ich kaum glauben, dass dieselbe über ein oder zwei Hunderttheile des Gesammtwerthes hinausgeht. Uebrigens dürfte es nicht schwierig sein, die Grösse wenigstens annähernd durch Versuche zu bestimmen, nämlich durch Beobachtung der gleichzeitigen Schwingungen zweier Nadeln, von denen die eine am gewöhnlichen Beobachtungsort, die andere unterdessen in ziemlich grosser Entfernung von dem Gebäude und anderen störenden Eisenmassen aufzuhängen sein würde und welche dann ihre Plätze vertauschen müssten. Aber bis jetzt war es nicht möglich, diese Versuche auszuführen. Die sicherste Abhülfe aber dürfte ein besonderes Gebäude schaffen, welches für magnetische Beobachtungen bestimmt ist und in Folge königlicher Huld bald errichtet

Digitized by Google

werden wird, von dessen Bau das Eisen überhaupt ausgeschlossen werden soll.

25.

Ausser den mitgetheilten Versuchen haben wir noch viele andere ähnliche ausgeführt, wenn auch früher mit geringerer Sorgfalt. Es wird jedoch von Interesse sein, die Resultate [41] hier in eine Tabelle zu bringen, wobei aber diejenigen übergangen werden, welche vor Aufstellung der feineren Apparate durch andere, rohere Hülfsmittel an Nadeln von den verschiedensten Dimensionen sich ergeben haben, obgleich alle wenigstens eine Annäherung an die Wirklichkeit gewährt haben. Durch wiederholte Versuche haben sich nach einander folgende Werthe von T ergeben:

Zahl	Zeit 1832	T
I	Mai 21	1,7820
II	Mai 24	1,7694
III	Juni 4	1,7713
IV	Juni 24—28	1,7625
V	Juli 23, 24	1,7826
VI	Juli 25, 26	1,7845
VII	September 9	1,7764
VIII	September 18	1,7821
IX	September 27	1,7965
X	October 15	1,7860

Die Versuche V—IX sind sämmtlich an demselben Orte angestellt worden, dagegen I—IV an verschiedenen Orten; der Versuch X ist eigentlich ein gemischter, da die Ablenkungen zwar am gewöhnlichen Ort beobachtet worden sind, die Schwingungen dagegen an einem anderen. Auf die Versuche VII und VIII ist eine fast gleiche Sorgfalt verwandt worden, dagegen auf die Versuche IV, V, VI und X eine etwas geringere, und auf die Versuche I—III eine bei weitem geringere. Bei den Versuchen I—VIII sind zwar verschiedene Nadeln angewandt worden, doch hatten dieselben dasselbe Gewicht und dieselbe Länge (das Gewicht war zwischen 400 g und 440 g); dagegen diente für den Versuch X eine Nadel, deren Gewicht 1062 g und deren Länge 485 mm betrug. Der Versuch IX ist nur unternommen worden, um zu sehen, welchen Grad der Genauigkeit man durch eine sehr

Digitized by Google

kleine Nadel erreichen kann. Das Gewicht der angewandten Nadel betrug nur 58 g, übrigens war aber die Sorgfalt nicht geringer, als bei den Versuchen VII und VIII. Es besteht kein Zweifel, dass die Feinheit der Beobachtungen merklich vermehrt werden wird, wenn noch schwerere Nadeln benutzt werden, z. B. solche, deren Gewicht bis zu 2000 oder 3000 g steigt.

[42] 26.

Wenn die Intensität T der erdmagnetischen Kraft durch eine Zahl k ausgedrückt wird, so liegt dieser eine gewisse Einheit V zu Grunde, nämlich eine mit jener gleichartige Kraft, deren Zusammenhang mit den anderen unmittelbar gegebenen Einheiten im Vorhergehenden zwar enthalten ist, jedoch in einer etwas verwickelteren Weise: es wird daher der Mühe werth sein, diesen Zusammenhang hier von neuem vorzuführen, um mit elementarer Klarheit zu zeigen, welche Aenderung die Zahl k erleidet, wenn wir anstatt von den Grundeinheiten von anderen ausgehen.

Zur Festsetzung der Einheit V muss man von der Einheit des freien Magnetismus M*) und der Abstandseinheit R ausgehen, und wir setzen V gleich der von M in dem Abstande R ausgeübten Kraft.

Als Einheit M haben wir diejenige Menge der magnetischen Flüssigkeit angenommen, welche auf eine gleich grosse, in dem Abstande R befindliche Menge M eine bewegende Kraft (oder wenn man lieber will, einen Druck) hervorbringt, welche gleich derjenigen W ist, die als Einheit gilt, d. h. gleich der Kraft, welche die als Einheit angenommene beschleunigende Kraft A auf die als Einheit angenommene Masse P ausübt.

Zur Festsetzung der Einheit A steht ein doppelter Weg offen: A kann nämlich entweder von einer ähnlichen unmittelbar gegebenen Kraft entlehnt werden, z. B. von der Schwerkraft am Beobachtungsorte, oder von der Wirkung von A, welche sich in der Bewegung von Körpern äussert. Bei der letzteren Art, der wir bei unseren Berechnungen gefolgt sind, sind zwei neue Einheiten erforderlich, nämlich die Zeiteinheit

*) Es wird wohl kaum nöthig sein, daran zu erinnern, dass die den Buchstaben früher gegebene Bedeutung hier aufhört.

Digitized by Google

und die Geschwindigkeitseinheit C, so dass als Einheit diejenige beschleunigende Kraft angenommen wird, welche, wenn sie die Zeit S hindurch wirkt, die Geschwindigkeit C hervorbringt; endlich wird für letztere diejenige Geschwindigkeit angenommen, welche der gleichförmigen Bewegung durch den Raum R in der Zeit S entspricht.

So ist klar, dass die Einheit V von drei Einheiten, entweder R, P, A oder R, P, S abhängt.

Nehmen wir nunmehr an, dass an Stelle der Einheiten V, R, M, W, A, P, C, S andere angenommen würden: V', R', M', W', A', P', C', S', die in ähnlicher Weise mit einander zusammenhängen wie die früheren, und dass beim Gebrauche des Maasses V' der Erdmagnetismus durch die Zahl k' ausgedrückt werde, so ist zu untersuchen, wie sich diese zu k verhält.

[43] Wenn man setzt:

$$\begin{aligned} V &= v V' \\ R &= r R' \\ M &= m M' \\ W &= w W' \\ A &= a A' \\ P &= p P' \\ C &= c C' \\ S &= s S', \end{aligned}$$

so werden v, r, m, w, a, p, c, s absolute Zahlen sein und

$$k V = k' V' \text{ oder } k v = k',$$

$$v = \frac{m}{r r},$$

$$\frac{m m}{r r} = w = p a,$$

$$a = \frac{c}{s},$$

$$c = \frac{r}{s}.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichungen erhalten wir:

I. $$k' = k \sqrt{\frac{p}{r s s}}$$

II. $$k' = k \sqrt{\frac{p a}{r r}}.$$

Digitized by Google

So lange wir den Weg beibehalten, den wir bei unseren Beobachtungen verfolgt haben, müssen wir die erste Formel gebrauchen; wenn wir z. B. an Stelle des Millimeters und des Milligramms das Meter und das Gramm als Einheiten annehmen, so wird $r = \frac{1}{1000}$, $p = \frac{1}{1000}$, also $k' = k$ sein; wenn die Pariser Linie und das Berliner Pfund, so werden wir haben: $r = \frac{1}{2{,}255829}$, $p = \frac{1}{467711{,}4}$, folglich

$$k' = 0{,}002196161\ k,$$

woher z. B. die Versuche VIII den Werth $T = 0{,}0039131$ ergeben.

[44] Wenn man lieber dem anderen Wege folgen will und die Schwerkraft zur Einheit der beschleunigenden Kräfte annimmt, so wird man für die Göttinger Sternwarte $a = \frac{1}{9811{,}63}$ setzen; dann sind, falls wir das Millimeter und das Milligramm beibehalten, die Zahlen k mit 0,01009554 zu multipliciren und die Aenderungen jener Einheiten nach der Formel II zu behandeln.

27.

Die Intensität der horizontalen erdmagnetischen Kraft T ist mit der Secante der Inclination zu multipliciren, um die ganze Intensität zu ergeben. Dass die Inclination zu Göttingen veränderlich ist und in gegenwärtiger Zeit eine Verminderung erleidet, haben die Beobachtungen von *Humboldt* gezeigt, der im Monat December 1805 den Werth von 69° 29′ gefunden hat, im Monat September 1826 aber 68° 29′ 26″. Ebenso habe ich am 23. Juni 1832 mit Hülfe desselben Inclinatoriums, welches einst der s. *Mayer* benutzte, 68° 22′ 52″ gefunden, was eine Verzögerung der Abnahme anzudeuten scheint, jedoch möchte ich dieser Beobachtung weniger Vertrauen schenken, nicht nur wegen der Unvollkommenheit des Instruments, sondern auch wegen des Umstandes, dass die im Observatorium angestellte Beobachtung nicht hinlänglich genug vor der Störung von Eisenmassen gesichert ist. Uebrigens wird auch diesem Elemente grössere Sorgfalt in Zukunft zugewandt werden.

Digitized by Google

28.

In dieser Abhandlung sind wir der allgemein angenommenen Erklärungsweise der magnetischen Erscheinungen gefolgt, nicht nur deswegen, weil sie vollständig genügt, sondern auch, weil sie in weit einfacheren Rechnungen fortschreitet als die andere Auffassung, welche den Magnetismus galvanoelectrischen Kreisen um die Theilchen des magnetischen Körpers zuschreibt; es war unsere Absicht, diese Auffassung, die sich allerdings n mehrfacher Hinsicht empfiehlt, weder zu bekräftigen noch zurückzuweisen, denn dies wäre unangebracht gewesen, da das Gesetz der gegenseitigen Wirkung zwischen den Elementen solcher Kreise noch nicht hinlänglich erforscht zu sein scheint. Welche Auffassung aber auch künftig für die magnetischen und electromagnetischen Erscheinungen angenommen wird: bezüglich der ersteren muss sie überall zu demselben Ergebniss wie die gewöhnliche Theorie führen, und was auf Grund dieser in der vorliegenden Abhandlung entwickelt ist, wird nur in der Form, nicht aber im Wesen verändert werden können.

Die Abhandung: »Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata«, ist von *Gauss* gelesen in der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften am 15. December 1832 und im 8 Bande der Abhandlungen dieser Gesellschaft. Seite 3 bis 44, gedruckt.

Die Uebersetzung ist von Herrn Oberlehrer Dr. *Kiel* in Bonn besorgt und von dem Herausgeber durchgesehen worden.

LANE LIBRARY
Digitized by Google

Anmerkungen.

Die Abhandlung von *Gauss*, deren Uebersetzung vorstehend abgedruckt ist, hat aus mehrfachen Gründen eine ausserordentliche Bedeutung für die Physik erlangt: durch das neue Princip der Messung physikalischer Grössen (das sog. absolute Maasssystem[1]), durch die mit Hülfe desselben gewonnene Möglichkeit, die Intensität des Erdmagnetismus jederzeit in einem unveränderlichen Maasse zu bestimmen, endlich durch neue Beobachtungsmethoden von einer bis dahin unerreichten Schärfe.

In der analytischen Mechanik war es schon lange üblich, aus den Grundeinheiten für Länge, Masse und Zeit (bei *Gauss mm, mg, sec*; nach den Beschlüssen des Pariser Congresses 1881 jetzt *cm, g, sec*) die Einheiten für die übrigen mechanischen Grössen abzuleiten. Als Einheit der Geschwindigkeit gilt diejenige, bei welcher die Längeneinheit in der Zeiteinheit zurückgelegt wird; die Einheit der Beschleunigung findet dann statt, wenn die Geschwindigkeit in der Zeit 1 um die eben definirte Geschwindigkeitseinheit wächst; die Einheit der bewegenden Kraft ist diejenige, welche der Masse 1 die Beschleunigung 1 ertheilt.

Gauss[2]) erweiterte dies Verfahren über das Gebiet der reinen Mechanik hinaus: gestützt auf das *Coulomb*'sche Gesetz der Wechselwirkung zweier Magnetpole definirte er als Einheit des Magnetismus diejenige Menge Nordmagnetismus, welche auf eine ihr gleiche in der Einheit der Entfernung befindliche die absolut gemessene Kraft 1 ausübt, und setzte

1) Eine zusammenhängende Darstellung des absoluten Maasssystems s. z. B. bei *F. Kohlrausch*, Leitfaden der praktischen Physik, Anhang.

2) S. Art. 26.

Digitized by Google

als Einheit der magnetischen Intensität (der Stärke eines Magnetfeldes) diejenige fest, welche auf den Einheitspol mit der Kraft 1 wirkt.

Es hat *Gauss*[1]) selbst darauf hingewiesen, dass »es keine Schwierigkeiten haben würde, auch galvanische Messungen auf absolute Maasse zurückzuführen«, und sein Freund und Mitarbeiter *Wilhelm Weber*[2]) hat dann diese Aufgabe thatsächlich gelöst, indem er das absolute electromagnetische Maasssystem aufstellte.

Man pflegt gegenwärtig den abgeleiteten Einheiten gewisse »Dimensionen« in Bezug auf die Grundeinheiten beizulegen, z. B. wenn l, m, t die Grundeinheiten andeuten, als Dimension einer Geschwindigkeit lt^{-1}, und ähnlich für einen Magnetpol $l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}$, für ein Magnetfeld $l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}$ anzusetzen[3]). Der Anfänger ist vor dem Missverständniss zu warnen, die Dimensionen als die wahre Bedeutung der betreffenden Grössen ansehen und etwa einen Magnetpol mit $l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}$ als gleichwerthig betrachten zu wollen. *Gauss* hat zu diesem Missverständniss keine Veranlassung gegeben, vielmehr den wahren Sinn dessen, was man heute Dimensionen nennt, klar dargelegt und ausgeführt, dass dieselben lediglich für den Uebergang von einem System der Grundeinheiten zu einem andern Bedeutung besitzen. Führt man nämlich an Stelle von l, m, t neue Einheiten l', m', t' ein, welche mit den alten in der Beziehung stehen $l = \lambda l'$, $m = \mu m'$, $t = \tau t'$, so ist z. B. diejenige Zahl, welche die Horizontalintensität im System l, m, t ausdrückt, mit $\lambda^{-1/2} \mu^{1/2} \tau^{-1}$ zu multipliciren, um die Zahl zu finden, welche dieselbe Grösse im neuen System darstellt. So ist gegenwärtig im mittleren Deutschland die Horizontalintensität in den Gaussischen Einheiten *mm*, *mg*, *sec* etwa 1,9; will man zum *cm*, *g*, *sec*-System übergehen, so hat man, da 1 mm = 0,1 cm, 1 mg = 0,001 g, zu multipliciren mit $0{,}1^{-1/2} \cdot 0{,}001^{1/2} = 0{,}1$, wodurch man 0,19 erhält.

Dass die Dimensionen der Grössen im absoluten Maasssystem nicht die wahre Bedeutung derselben angeben und etwa alle physikalischen Grössen durch Länge, Masse und

1) Gött. gel. Anz. 24. Dec. 1832. *Gauss*, Werke V, S. 301.
2) *W. Weber*, Werke Bd. III, S. 6, 276, 320, 591.
3) Vgl. *Gauss*, Art. 26. Die Lehre von den »Dimensionen« ist zuerst von *Fourier* für das Gebiet der Wärme entwickelt worden. S. *Fourier*, Théorie analytique de la chaleur. § 159—162. 1822.

Digitized by Google

Zeit ausdrücken lehren, geht schon daraus unzweifelhaft hervor, dass es zwei[1]) absolute electrische Maasssysteme giebt, in welchen dieselben Grössen ganz verschiedene Dimensionen besitzen.

Die Werthschätzung der absoluten Maasssysteme hat im Laufe der Zeit mannigfache Wandlungen durchgemacht; nach einer Periode der Ueberschätzung scheint man jetzt in den entgegengesetzten Fehler zu verfallen.

Zunächst sichert die Anwendung der absoluten Maasse — was für das Gebiet des Magnetismus später noch eingehender erörtert werden soll — eine Vergleichbarkeit der Messungen, welche zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten angestellt sind. Ferner nimmt der Ausdruck vieler Naturgesetze eine besonders einfache Form an, indem gewisse Factoren = 1 werden (z. B. wird die Kraft zwischen zwei Magnetpolen μ_1 und μ_2 in der Entfernung r gleich $\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$) und insbesondere wird die Einheit der »Energie« für das Gebiet der Electricität und des Magnetismus übereinstimmend mit der Einheit der mechanischen Energie.

Diese Vorzüge haben zur Folge gehabt, dass, als im letzten Jahrzehnt die Electrotechnik sich mächtig entwickelte, ihre Vertreter einmüthig ein auf die absoluten electromagnetischen Maasse gegründetes System von Einheiten annahmen.

Einen sehr beachtenswerthen Versuch zur Umbildung und Weiterentwickelung des absoluten Maasssystems hat neuerdings *W. Ostwald*[2]) unternommen. Seine positiven Vorschläge kommen im Wesentlichen darauf hinaus, zunächst für sämmtliche Gebiete als gemeinsame Grundeinheiten die der Länge, Zeit und Energie (an Stelle der nur eine beschränkte Bedeutung besitzenden Masse) einzuführen.

Für die Mechanik genügen diese Einheiten; für jedes andere Gebiet — Electricität, Magnetismus, Wärme, strahlende Energie, Chemie — muss dann noch eine vierte, dem jeweiligen Gebiet speciell angehörige Einheit festgesetzt werden.

Man übersieht, dass hierdurch die Anwendung absoluter Maasse auch für die Erscheinungen der Wärme, der strahlenden Energie und der chemischen Kräfte ermöglicht wird,

---

1) Oder sogar vier. Vgl. *Hertz*, Wied. Ann. 24. S. 114. 1885.

2) *W. Ostwald*, Studien zur Energetik, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wissenschaften. 1891. S. 271, und 1892, S. 211.

Digitized by Google

— was auf dem von *Gauss* und *Weber* angebahnten Wege nicht gelungen war.

Für den Magnetismus ergiebt sich hiebei aber eine eigenthümliche Schwierigkeit.

Augenscheinlich muss die vierte *Ostwald*'sche Einheit, wenn sie praktisch brauchbar sein soll, entweder sich unverändert aufbewahren lassen (wie das Originalmeter) oder sicher reproducirbar sein (wie die *Siemens*'sche Widerstandseinheit).

Es giebt aber weder einen unveränderlichen Magnet, noch auch einen Ort von unveränderlicher Intensität des Erdmagnetismus, sodass der *Ostwald*'sche Vorschlag unausführbar wird, wenn man sich auf den Magnetismus allein beschränken will.

Unter Hinzuziehung der Electricität wird die Aufgabe lösbar: nach Feststellung der electrischen Maasse [1]) hätte man als Einheit des magnetischen Momentes (des »Stabmagnetismus«) dasjenige anzusetzen, welches in grosser Entfernung gleiche Wirkung ausübt, wie ein die Flächeneinheit umfliessender Strom der Stärke 1.

Um die Bedeutung der *Gauss*'schen Arbeit für unsere Kenntniss des Erdmagnetismus, insbesondere seiner Intensität, gebührend zu würdigen, muss man sich den Zustand dieses Zweiges der Wissenschaft vor ihrem Erscheinen vergegenwärtigen [2]). Vor *Gauss* konnte man (durch Beobachtung der Schwingungen einer Magnetnadel und zwar meist einer Inclinationsnadel) eine ziemlich rohe Vergleichung der an einem Orte vorhandenen Intensität mit der an einem Normalorte erhalten; die in längeren Zeiträumen vorgehenden Aenderungen derselben entzogen sich vollständig der Wahrnehmung. *Gauss* lehrte die Intensität nach einem unveränderlichen Maasse jederzeit bestimmen; er bezeichnet dieses als »absolut« im Gegensatz zu den früheren relativen Messungen. Er begnügte sich nicht damit, seine Methode in Göttingen anzuwenden, sondern gründete den weitverzweigten magnetischen Verein, dessen werthvolle Beobachtungen er im Verein mit *W. Weber* herausgegeben hat [3]).

---

1) Diese ist in verschiedener Weise ausführbar.

2) Man sehe die Einleitung von *Gauss* selbst. Die dort angeführten Beobachtungen von *Humboldt* findet man Gilbert's Ann. Bd. 7. S. 329. 1801, und Bd. 20. S. 257. 1805; die von *Sabine* Pogg. Ann. Bd. 6. S. 88. 1826.

3) Resultate aus den Beobachtungen des magnet. Vereins 1836—1841.

Digitized by Google

Gauss bezieht sich auf eine Arbeit von *Poisson*[1]; indessen würde man fehlgehen, wenn man diesen als Erfinder des absoluten Maasssystems ansehen wollte. *Poisson* zeigt, dass, wenn die Einheit des Magnetismus auf eine gleiche in der Einheit der Entfernung die Kraft f ausübt, die Intensität des Erdmagnetismus sich mit Hülfe von f ausdrücken lässt. Das Mittel hiezu bietet die Beobachtung der Schwingungen von zwei Magnetnadeln unter dem Einfluss des Erdmagnetismus allein und jeder Nadel unter dem Zusammenwirken der anderen und des Erdmagnetismus.

Man beachte, dass *Poisson* die Einheit des Magnetismus willkürlich lässt, während der Kern des *Gauss*schen absoluten Maasssystems gerade darin liegt, dieselbe aus der Kraftwirkung zu bestimmen.

Bei der Ausarbeitung der Beobachtungsmethoden[2] — welche übrigens in der vorliegenden Abhandlung nicht beschrieben sind — kam *Gauss* seine Eigenschaft als praktischer Astronom zu statten. Die von *Gauss*[3] erfundene und bei erdmagnetischen Messungen zuerst erprobte Winkelmessung mit Fernrohr, Spiegel und Scala, sowie seine Vorschriften zur Bestimmung der Schwingungsdauer eines Magnets und zur empirischen Ermittelung eines Trägheitsmomentes u. s. w. können als die Grundlagen eines grossen Theils der modernen Beobachtungskunst betrachtet werden.

Zu Artikel 6.

1) Für den Anfänger werden einige Erläuterungen nicht überflüssig sein.

Die magnetische Kraft besitze für die in Betracht kommenden Theile des Raumes constante Richtung und Intensität (»das Magnetfeld sei homogen«).

Es werde ein im Raume festes Coordinatensystem xyz eingeführt; die auf die Einheit des Magnetismus (vgl. Art. 26) wirkende Kraft $\mathfrak{H}$ habe die Componenten X, Y, Z[4], so

---

1) *Poisson*, Solution d'un problème relatif au magnétisme terrestre. Connaissance des temps. 1828. p. 322.

2) Vgl. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, insbes. 1836. S. 13.

3) und unabhängig von *Poggendorff*.

4) Die Bezeichnung entspricht nicht der von *Gauss*, welche sich für Anwendung rechtwinkliger Coordinaten nicht eignet.

Digitized by Google

werden die Componenten der translatorischen Wirkung auf ein magnetisches Theilchen μ sein

$$\mu X,\ \mu Y,\ \mu Z,$$

demnach für den ganzen Magnet

$$\Sigma\mu X,\ \Sigma\mu Y,\ \Sigma\mu Z.$$

Da aber X, Y, Z constant sind und $\Sigma\mu$ verschwindet, so werden diese Grössen $= 0$, und in einem homogenen Felde wird auf einen Magnet keine translatorische Kraft ausgeübt. Es kann also nur ein Drehungsmoment vorhanden sein.

Sind x, y, z die Coordinaten von μ, so ergiebt sich als Drehungsmoment um die x-Axe

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma(y \cdot \mu Z - z \cdot \mu Y) = Z\Sigma\mu y - Y\Sigma\mu z.$$

Wenn gesetzt wird

$$\Sigma m x = \alpha,\ \Sigma m y = \beta,\ \Sigma m z = \gamma,$$

so wird

$$\mathfrak{M}_x = \beta Z - \gamma Y \text{ und ähnlich}$$
$$\mathfrak{M}_y = \gamma X - \alpha Z,$$
$$\mathfrak{M}_z = \alpha Y - \beta X.$$

Die Grössen α, β, γ sind die Momente des Magnets nach den Axen x, y, z.

Bezeichnet M das Hauptmoment des Magnetes, und wird dadurch zugleich die im Magnet feste Richtung der magnetischen Axe angedeutet, so ist (vgl. Art. 5)

$$\alpha = M\cos(M,x),\ \beta = M\cos(M,y),\ \gamma = M\cos(M,z).$$

Damit — bei Abwesenheit anderer Kräfte — der Magnet im homogenen Felde sich im Gleichgewicht befinde, muss sein

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z = 0,$$

woraus sofort folgt

$$\alpha : \beta : \gamma = X : Y : Z, \text{ d. h.}$$
$$\cos(M,x) : \cos(M,y) : \cos(M,z) = \cos(\mathfrak{H},x) : \cos(\mathfrak{H},y) \cos : (\mathfrak{H},z).$$

Es muss also die magnetische Axe in die Richtung des Magnetfeldes fallen.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ergiebt sich ein resultirendes Drehungsmoment

$$\sqrt{(\beta Z - \gamma Y)^2 + (\gamma X - \alpha Z)^2 + (\alpha Y - \beta X)^2} = M\mathfrak{H}\sin(M,\mathfrak{H})$$

um eine Axe, deren Richtungscosinus sich verhalten wie

$$\beta Z - \gamma Y : \gamma X - \alpha Z : \alpha Y - \beta X.$$

Digitized by Google

Diese Axe steht also senkrecht auf den Richtungen von M und $\mathfrak{H}$.

Da im vorliegenden Fall die translatorische Kraft verschwindet, so ist nach einem bekannten Satz dies Drehungsmoment um alle parallelen Axen gleich.

Die weiteren Erörterungen des Art. 6 werden leicht verständlich, wenn man das Drehungsmoment durch zwei nach $\mathfrak{H}$ und entgegengesetzt gerichtete Kräfte $\frac{M\mathfrak{H}}{r}$ ersetzt, deren Angriffspunkte an den Enden einer mit der magnetischen Axe parallelen Linie von der Länge r liegen.

Zu Artikel 7.

2) Der Magnet sei nunmehr um einen Punkt C drehbar, das homogene Magnetfeld sei das der Erde, und es werde auch die Wirkung der Schwere auf die Masse des Magnets berücksichtigt.

Wir verlegen den Anfangspunkt unseres Coordinatensystems nach C, zählen x horizontal im magnetischen Meridian nach Nord, y senkrecht dazu nach Ost, z vertical nach oben, und haben, wenn wir die Masse m des Magnets in seinem Schwerpunkt x_1, y_1, z_1 concentrirt denken, durch Nullsetzen der Drehungsmomente um die Coordinatenaxen

$$\begin{aligned} \beta Z \qquad & - y_1 mg = 0 \\ \gamma X - \alpha Z & + x_1 mg = 0 \\ - \beta X \qquad & = 0. \end{aligned}$$

g bedeutet die Beschleunigung der Schwere; die Componente Y ist für das gewählte Coordinatensystem $= 0$.

Aus der letzten Gleichung folgt $\beta = 0$, d. h. die magnetische Axe muss auf y senkrecht stehen, also im magnetischen Meridian liegen. Mit Rücksicht auf $\beta = 0$ ergiebt die erste Gleichung $y_1 = 0$, d. h. der Schwerpunkt des Magnets muss sich in der durch C gelegten magnetischen Meridianebene befinden.

Um endlich auch die zweite Gleichung zu deuten, beachten wir, dass, wenn $\mathfrak{H}$ die ganze Intensität, i die Inclination bezeichnet:

$$X = \mathfrak{H} \cos i, \quad Z = - \mathfrak{H} \sin i$$

und

$$\alpha = M \cos \vartheta, \quad \gamma = - M \sin \vartheta$$

Digitized by Google

wird, wo ϑ die Neigung der magnetischen Axe gegen die Horizontale ist.

Sei ferner S der Schwerpunkt, $CS = s$, und σ der Winkel zwischen CS und der x-Axe, so geht die zweite Gleichung über in

$$- M\mathfrak{H} \sin(\vartheta - i) + mgs \cos\sigma = 0,$$

d. h. das Drehungsmoment des Erdmagnetismus und der Schwerkraft um die y-Axe müssen sich aufheben.

Die veränderte Form, welche *Gauss* dieser Bedingung ertheilt, ergiebt sich so:

Die Wirkung der Verticalcomponente des Erdmagnetismus ersetzt *Gauss* (vgl. Art. 6) durch eine Verlegung des Schwerpunkts in der Richtung der magnetischen Axe, welche in unserer Bezeichnung ist

$$r' = \frac{M\mathfrak{H} \sin i}{mg}.$$

Mit Einführung von r' nimmt die zweite Gleichung die Form an:

$$- MX \sin\vartheta + mg[r' \cos\vartheta + x_1] = 0,$$

$r' \cos\vartheta + x_1$ ist aber der Abstand des verlegten Schwerpunktes von der durch C gelegten Verticalen (der z-Axe), und $MX \sin\vartheta$ ist die von *Gauss* mit $MT \sin i$ bezeichnete Grösse.

Es möge nun der Magnet Schwingungen um die Verticale z ausführen.

Ist die durch die magnetische Axe gelegte Verticalebene aus dem magnetischen Meridian um einen Winkel u herausgedreht, so wird

$$\beta = M \cos\vartheta \sin u,$$

woher, wenn K das Trägheitsmoment bedeutet, die Bewegungsgleichung wird

$$K\frac{d^2u}{dt^2} = - MX \cos\vartheta \sin u.$$

Die auf unendlich kleine Amplituden reducirte Schwingungsdauer sei t, dann ist bekanntlich

$$MX = \frac{\pi^2 K}{t^2 \cos\vartheta}$$

Digitized by Google

oder in der Bezeichnung von *Gauss:*

$$MT = \frac{\pi^2 K}{t^2 \cos i}.$$

Zu Artikel 8.

3) Gegenwärtig ist es üblich, die Grösse $\Theta/TM = \frac{1}{n}$ als »Torsionsverhältniss« zu bezeichnen.

Die Begründung des Verfahrens zur Bestimmung von n ist leicht.

Der Einfluss der Torsion auf die Schwingungsdauer ergiebt sich folgendermaassen. Indem man die Differenz der Gleichungen für Ruhe und Bewegung

$$0 = -TM \sin u^0 + \Theta(v - u^0),$$

$$K \frac{d^2 u}{dt^2} = -TM \sin u + \Theta(v - u)$$

bildet, folgt (da u^0 constant ist):

$$K \frac{d^2(u - u^0)}{dt^2} = -TM(\sin u - \sin u^0) - \Theta(u - u^0).$$

Nun ist

$$\sin u - \sin u^0 = \sin(u - u^0)\cos u^0 - \sin u^0[1 - \cos(u - u^0)]$$

$$= \sin(u - u^0)\cos u^0 \left[1 - \operatorname{tg} u^0 \operatorname{tg} \frac{u - u^0}{2}\right].$$

Bei nur halbwegs sorgfältiger Ausführung der Versuche unterscheidet sich $\cos u^0\left[1 - \operatorname{tg} u^0 \operatorname{tg} \frac{u - u^0}{2}\right]$ nicht merklich von 1; indem man noch $\Theta(u - u^0)$ durch $\Theta \sin(u - u^0)$ ersetzt, kommt:

$$K \frac{d^2(u - u^0)}{dt^2} = -(TM + \Theta)\sin(u - u^0)$$

$$= -TM\left(\frac{n+1}{n}\right)\sin(u - u^0),$$

woraus sofort hervorgeht, dass durch die Torsion die Schwingungsdauer für ∞ kleine Amplituden im Verhältniss $1 : \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ verkleinert wird.

Digitized by Google

Zu Artikel 10.

4) Die von *Gauss* gewählte Art der Anbringung der Gewichte giebt zu Bedenken Veranlassung, da dieselben bei den Schwingungen eine drehende Bewegung um die Spitzen ausführen können, wodurch je nach Umständen die Schwingungen beschleunigt oder verlangsamt werden können. Besser wäre schon eine Aufhängung an Schneiden statt an Spitzen; gegenwärtig benutzt man nach Vorgang von *W. Weber* meistens durchbohrte Cylinder, welche auf verticale Stifte am Magnetträger aufgesteckt werden, so dass eine relative Bewegung ausgeschlossen ist [1]).

Auf eine weitere nicht unwesentliche Correction hat zuerst *Fechner* [2]) hingewiesen. Der Hauptmagnet liegt nämlich bei den Schwingungsbeobachtungen mit seiner Längsrichtung nahe im magnetischen Meridian, bei den Ablenkungsbeobachtungen senkrecht zu demselben. In der ersteren Lage erfährt sein Moment durch die magnetisirende Kraft der Horizontalintensität eine Verstärkung, welche sofort verschwindet, wenn der Magnet senkrecht zum magnetischen Meridian gestellt wird. *W. Weber* [3]) hat ein Verfahren angegeben, um diese Reduction zu ermitteln und in Rechnung zu ziehen.

Da die Temperaturcoefficienten des magnetischen Momentes auch für gute Magnete nicht unbedeutende Verschiedenheiten aufweisen (0,001—0,0003 für 1 Grad Celsius), wird man zur Erreichung der grössten Genauigkeit den Temperaturcoefficienten des Hauptmagnets bestimmen und die Variationen der Horizontalcomponente aus den Schwingungen eines zweiten Magnets mit ebenfalls bekanntem Temperaturcoefficienten oder aus den Angaben eines besonderen »Variometers für die Horizontalintensität« ableiten. Solche Intensitätsvariometer hat zuerst *Gauss* selbst construirt [4]); für den Gebrauch handlicher sind die Instrumente von *F. Kohlrausch* [5]).

---

1) S. auch *Dorn*, Wied. Ann. 17. S. 788. 1882. *Kreichgauer*, Wied. Ann. 25. S. 273. 1885.

2) *Fechner*, Pogg. Ann. 55. S. 189. 1842.

3) *W. Weber*, Werke, Bd. II. S. 336. (Abh. der Gött. Ges. d. Wiss. Bd. 6. 1855.) Vgl. ferner *Dorn*, Wied. Ann. 17, S. 776. 1882; ebenda 35, S. 270 u. 275. 1888.

4) *Gauss*, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837, S. 1.

5) *F. Kohlrausch*, Wied. Ann. 19. S. 132. 1883.

Digitized by Google

Eine scharfe Methode zur Bestimmung des Temperaturcoefficienten des magnetischen Moments hat *W. Weber*[1]) gegeben.

Zu Artikel 17 und 18.

5) In der Theorie der Ablenkungsbeobachtungen werden die Entwickelungen des Art. 16 auch einem Anfänger keine erheblichen Schwierigkeiten machen; folgende Andeutungen mögen das Verständniss des Art. 17 erleichtern.

Wegen der Gleichung

$$m\,T \sin u^0 + \Theta \sin (u^0 - N) = 0$$

hat man

$$m\,T \sin u + \Theta \sin (u - N) =$$
$$m\,T(\sin u - \sin u^0) + \Theta\,[\sin (u - N) - \sin (u^0 - N)].$$

Setzt man hierin

$$\sin u - \sin u^0 = \sin (u - u^0) \cos u^0 - \sin u^0\,[1 - \cos (u - u^0)],$$

vernachlässigt den zweiten Theil und transformirt die andere Sinusdifferenz entsprechend, so erhält man

$$[m\,T \cos u^0 + \Theta \cos (u^0 - N)] \sin (u - u^0). \quad -$$

Die Form der Reihe für $\mathrm{tg}\,(u - u^0)$ ergiebt sich so.

Zunächst beachte man, dass f, f', f'' ... keine von $\cos (\psi - u)$ und $\sin (\psi - u)$ freien Glieder enthalten. In der Gleichung

$$(m\,T + \Theta) \sin (u - u^0) = f R^{-(n+1)} + f' R^{-(n+2)} + \ldots .$$

führe man ein

$$\sin (\psi - u) = \sin (\psi - u^0) \cos (u - u^0) - \cos (\psi - u^0) \sin (u - u^0)$$
$$\cos (\psi - u) = \cos (\psi - u^0) \cos (u - u^0) + \sin (\psi - u^0) \sin (u - u^0),$$

so erscheinen bei der Entwickelung f, f', f'' ... zunächst dieselben Functionen von u^0 (statt von u) in eine Potenz von $\cos (u - u^0)$ multiplicirt, sodann Terme mit $\sin (u - u^0$, u. s. f.

---

1) *W. Weber*, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837. S. 38. (Werke Bd. II. S. 58.)

Digitized by Google

Da nun $\sin(u - u^0)$ von der Grössenordnung $R^{-(n+1)}$ ist und $\cos(u - u^0)$ nur um Terme der Ordnung $R^{-(2n+2)}$ von 1 sich unterscheidet, so wird man, wenn noch der Kürze wegen

$$f = mM \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [n\cos(\psi - U)\sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U)\cos(\psi - u^0)]\cos(u - u^0) \\ -[n\cos(\psi - U)\cos(\psi - u^0) - \sin(\psi - U)\sin(\psi - u^0)]\sin(u - u^0) \end{array} \right\}$$

$$= mM\{C\cos(u - u^0) - S\sin(u - u^0)\}$$

gesetzt wird, haben:

$$(mT + \Theta)\sin(u - u^0)$$
$$= mM\{C\cos(u - u^0) - S\sin(u - u^0)\}R^{-(n+1)}$$
$$+ f_0' R^{-(n+2)} + f_0'' R^{-(n+3)} + \ldots f_0^{(n+1)} R^{-(2n+2)}$$
$$+ \Phi,$$

wo Φ die weiteren Terme zusammenfasst, welche nicht mehr so einfach gebildet sind und der Index 0 die Substitution von u^0 statt u andeutet.

Man schaffe nun das Glied mit $S\sin(u - u^0)$ auf die linke Seite, dividire mit

$$\{(mT + \Theta) + mMSR^{-(n+1)}\}\cos(u - u^0)$$

und entwickele nach Potenzen von R.

Man erhält dann unter Berücksichtigung der oben über $\cos(u - u^0)$ gemachten Bemerkung

$$\operatorname{tg}(u - u^0) =$$
$$\frac{mMC}{mT + \Theta} R^{-(n+1)} + \frac{f_0'}{mT + \Theta} R^{-(n+2)} + \ldots$$
$$\frac{f_0^{(n)}}{mT + \Theta} R^{-(2n+1)} + \left\{ \frac{f_0^{(n+1)}}{mT + \Theta} - \frac{m^2 M^2 SC}{(mT + \Theta)^2} \right\} R^{-(2n+2)}$$
$$+ \Phi',$$

indem mit Φ' die weiteren Glieder angedeutet werden.

Diese Formel enthält zunächst das Resultat von *Gauss* für $\operatorname{tg}(u - u^0)$ und führt einfach zu den Entwickelungen des Art. 18.

Da $\operatorname{arctg}\alpha = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \ldots$, so unterscheidet sich eine für $u - u^0$ abzuleitende Reihe von der vorigen erst um Terme der Ordnung $-(3n + 3)$.

Digitized by Google

Aendert man den Winkel ψ um π, so wechseln f', f''' ... ihr Zeichen, während S und C denselben Werth behalten. Aus den Mittelwerthen $\frac{1}{2}(u' + u''')$ und $\frac{1}{2}(u'' + u'''')$ fallen also f', f''' ... heraus.

Vermehrt man andererseits U um π, so gehen S und C in ihr Gegentheil über. Im Falle der Natur ($n = 2$) werden also in der Combination $\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''')$ die Terme mit R^{-4} und R^{-6} sich herausheben und demnach auch $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''')$ die von *Gauss* angegebene Form haben[1]):

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(u' - u'' + u''' - '''') = LR^{-3} + L'R^{-5} + L''R^{-7} + \ldots$$

1) Vgl. auch *Riecke*, Pogg. Ann. 149. S. 62. 1873, und Wied. Ann. 8. S. 299. 1879.

Halle a. S., 22. Sept. 1893.

E. Dorn.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Q
111
085
no. 53
1894
LANE
HIST

LANE MEDICAL LIBRARY

To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below.

Digitized by Google

Nr. 24. **Galileo Galilei,** Unterredungen u. mathem. Demonstrationen über 2 neue Wissenszweige etc. (1638.) 3. u. 4. Tag mit 90 Fig. im Text. Aus dem Italien. u. Latein. übers. u. herausg. von A. von Oettingen. (141 S.) ℳ 2.—.

» 25. —— —— (1638.) Anhang zum 3. u. 4. Tag, 5. u. 6. Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus dem Italien. u. Latein. übers. u. herausg. von A. von Oettingen. (66 S.) ℳ 1.20.

» 31. **Lambert's** Photometrie. (Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae). (1760.) Deutsch herausg. v. E. Anding. Erstes Heft: Theil I und II. Mit 35 Fig. im Text. (135 S.) ℳ 2.—.

» 32. —— Zweites Heft: Theil III, IV und V. Mit 32 Fi

» 33. —

» 36. F

» 37. S

» 40. A

» 44. I

» 52. J

» 53.

Nr. 54

» 55

» 56

» 57

A111H Gauss, K.F.
085 Die Intensität der erd-
no.53 magnetischen Kraft.
1894 NAME DATE DUE 61548

Digitized by Google